

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA  
EMPRESA QUE FABRICA PRODUCTOS DE PAPEL**

**POR**

**JOSÉ GUADALUPE TORRES CHAVARRÍA**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**MAYO, 2017**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA  
EMPRESA QUE FABRICA PRODUCTOS DE PAPEL

POR

JOSÉ GUADALUPE TORRES CHAVARRÍA

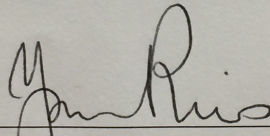
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

MAYO, 2017

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Secuenciación de trabajos en una empresa que fabrica productos de papel», realizada por el alumno José Guadalupe Torres Chavarría, con número de matrícula 1422417, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

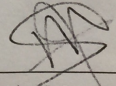


---

Dra. Yasmín A. Ríos Solís  
Directora

---

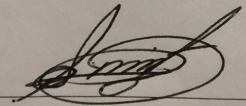
Dr. Mario Saucedo Espinosa  
Revisor



---

Dra. Iris A. Martínez Salazar  
Revisor

Vo. Bo.



---

Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo 2017

*A mis padres Guadalupe y Maricela*



# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>x</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	3
<b>2. Problema de Secuenciación de Trabajos</b>	<b>5</b>
2.1. Ambientes de problemas de secuenciación de trabajos . . . . .	5
2.2. Características de procesamiento y restricciones . . . . .	8
2.2.1. Restricciones de precedencia . . . . .	8
2.2.2. Restricciones de centro de trabajos . . . . .	9
2.2.3. Restricciones de ruteo . . . . .	9
2.2.4. Secuencia dependiente de los tiempos y costos de preparación . . . . .	9
2.3. Medidas de desempeño y objetivos . . . . .	10

2.3.1. Objetivo makespan . . . . .	10
2.3.2. Objetivos relacionados con la fecha de vencimiento . . . . .	10
2.3.3. Costos de preparación . . . . .	11
2.4. Herramientas matemáticas para la solución de problemas de secuenciación . . . . .	12
2.4.1. Modelos de única máquina . . . . .	12
2.4.2. Modelo de máquinas en paralelo . . . . .	16
2.4.3. Modelo de planeación y ordenamiento de trabajos en un taller de flujo . . . . .	19
2.4.4. Modelo de planeación y ordenamiento de trabajos de tipo taller	20
<b>3. Programación Disyuntiva y la Heurística Cuello de Botella Móvil</b>	<b>22</b>
3.1. Programación disyuntiva . . . . .	22
3.1.1. Aplicación de la programación disyuntiva . . . . .	23
3.2. Heurística cuello de botella móvil . . . . .	40
3.2.1. Aplicación de la heurística cuello de botella móvil . . . . .	42
<b>4. Caso de estudio</b>	<b>48</b>
4.1. Descripción del problema real . . . . .	49
4.2. Proceso de elaboración de una bolsa . . . . .	50
4.3. Datos . . . . .	60
4.4. Problema de secuenciación de trabajos de tipo taller . . . . .	63

---

<b>5. Conclusiones</b>	<b>109</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	109
5.2. Trabajo a futuro . . . . .	110

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco infinitamente a mis padres, el Sr. José Guadalupe Torres Zamarripa y la Sra. Maricela Chavarría Chapa por apoyarme siempre en todo momento y motivarme a seguir adelante.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada en mi paso por la maestría.

Gracias al apoyo de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por todas las facilidades.

Gracias a todos mis maestros por todo el conocimiento transmitido a lo largo de mi maestría, en especial a mi asesora de Tesis la Dra. Yasmín Ríos Solís por su apoyo incondicional. A mis revisores el Dr. Mario Saucedo Espinosa y la Dra. Iris A. Martínez Salazar por formar parte de este comité de Tesis. A mis compañeros y amigos de generación Carolina, Fernando, Pepe, Carlos, Andrés, Rodrigo, a todos, muchas gracias.

# RESUMEN

---

José Guadalupe Torres Chavarría.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA EMPRESA QUE FABRICA  
PRODUCTOS DE PAPEL.

Número de páginas: 127.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** El objetivo principal de esta investigación es resolver un problema real que se presenta en una empresa que fabrica productos de papel. Detectamos que dicho problema se puede modelar como un problema de secuenciación de tareas de tipo taller, mejor conocido en la literatura y en inglés como *Job Shop Scheduling Problem* dadas las características que tiene la empresa. Para resolver el problema usamos el método exacto llamado Programación Disyuntiva y la heurística Cuello de Botella Móvil.

**CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:** La programación disyuntiva es un método exacto usado para resolver problemas de secuenciación de tareas. En la presente investigación se explica el funcionamiento de dicho método, se toman instancias de la literatura para llegar a una solución. Otra forma es aplicar heurísticas y una muy



usada para estos tipos de problemas es la llamada heurística cuello de botella móvil. El caso de estudio se enfoca en una empresa que fabrica productos de papel para la cual se describe la problemática asociándola con el problema de secuenciación de tareas tipo taller. Se presenta un modelo matemático de programación disyuntiva para después resolver de manera analítica y así dar una solución específica al problema. Se resuelven instancias basadas en datos reales.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_  
Dra. Yasmín A. Ríos Solís

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En esta investigación se estudia un caso real en una empresa llamada *Diseños*, la cual fabrica productos de papel, en específico bolsas para comercios. La empresa cuenta con un método de producción donde no se aplican modelos matemáticos para llevar a cabo dichos trabajos. Por lo tanto, el objetivo es optimizar la producción de la empresa para minimizar los tiempos de producción y así poder asimilar más clientes.

En esta tesis demostramos que el caso real de dicha empresa es similar al Problema de secuenciación de trabajos de tipo taller, en la literatura mejor conocido en inglés como *Jop Shop Scheduling Problem (JSSP)*, donde se tiene un número específico de máquinas y de trabajos, cada trabajo tiene que ser procesado en una secuencia de máquinas en algún orden determinado, una característica importante en este tipo de problemas es que los trabajos no necesariamente pasan por todas las máquinas.

Revisando la literatura vemos que este problema existe en muchos sistemas de producción y manufactura dentro del ámbito industrial como puede ser en un taller mecánico, en una imprenta, en carpinterías, por mencionar algunas.

Usamos modelos matemáticos para el JSSP para encontrar soluciones mediante métodos como la programación disyuntiva o la heurística de cuello de botella.

Validamos nuestro enfoque con instancias de la literatura e instancias basadas en datos de la empresa de nuestro caso de estudio.

## 1.1 OBJETIVOS

Estudiar el proceso de producción en una empresa dedicada a la elaboración de bolsas de papel. Dicho proceso se asocia al problema de secuenciación de trabajos tipo taller.

Presentar una solución particular al problema usando la programación disyuntiva, la cual es utilizada para resolver problemas de secuenciación de trabajos.

Otro objetivo es presentar y explicar los más importantes ambientes de problemas de secuenciación de trabajos, tales como los problemas de máquina única, máquinas paralelas, sistemas de tipo taller, de tipo taller de flujo y así poder diferenciar unos con otros. Se ven algunas reglas y métodos para dar soluciones a dichos problemas.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

En literatura se sabe que los problemas de secuenciación de trabajos han sido ampliamente estudiados en los últimos años. Existen muchas empresas donde sus procesos de trabajo presentan características asociadas a los problemas de JSSP. El JSSP es uno de los problemas de optimización combinatoria más conocidos.

Como lo menciona Pinedo [38], la planificación y la programación de tareas son procesos de ayuda a la toma de decisiones que se utilizan frecuentemente en muchas industrias manufactureras y de servicios. Estas desempeñan un papel importante en la adquisición y producción, en el transporte y la distribución, y en el procesamiento de la información y la comunicación. Las funciones de planificación y programación

de una empresa se basan en técnicas matemáticas y métodos heurísticos para asignar recursos limitados a las actividades que deben realizarse. Esta asignación de recursos tiene que hacerse de tal manera que la empresa optimice sus objetivos y los alcance. Los recursos pueden ser máquinas en un taller, pistas en un aeropuerto, tripulaciones en un sitio de construcción o unidades de procesamiento en un entorno informático. Las actividades pueden ser operaciones en un taller, despegues y aterrizajes en un aeropuerto, etapas en un proyecto de construcción, o programas de computadora que tienen que ser ejecutados. Cada actividad puede tener un nivel de prioridad, una hora de inicio más temprana posible y una fecha de vencimiento. Los objetivos pueden tomar muchas formas diferentes, tales como minimizar el tiempo para completar todas las actividades, minimizar el número de actividades que se completan después de las fechas de vencimiento comprometidas, y así sucesivamente.

### 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS

En el capítulo 2 se habla de algunos de los problemas de secuenciación de trabajos, en lo particular sobre problemas de máquina única, máquinas paralelas, del tipo taller, taller de flujo y sus características. Además, para cada caso se ven herramientas matemáticas para llegar a soluciones de dichos problemas.

En el capítulo 3 se platica más en específico sobre el problema de secuenciación de trabajos tipo taller, se presentan dos métodos de solución: la *Programación Disyuntiva* y la *Heurística Cuello de Botella Móvil*. Además, se toman instancias de la literatura para presentar soluciones usando dichos métodos.

En el capítulo 4 se describe un caso de estudio real, el cual trata de una empresa que fabrica productos de papel. Se modela el problema real con problema de secuenciación en talleres. Además, se toman datos reales y se da una solución usando la programación disyuntiva.

Por último, en el capítulo 5 se dan conclusiones de esta investigación y se

---

platica sobre el trabajo a futuro.



## CAPÍTULO 2

# PROBLEMA DE SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS

---

En este capítulo se presentan ambientes de problemas de secuenciación de trabajos tales como problemas de una sola máquina, de máquinas paralelas, problemas de tipo taller, de taller de flujo, y diferentes reglas o herramientas matemáticas indispensables para la solución de dichos problemas.

## 2.1 AMBIENTES DE PROBLEMAS DE SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS

Una importante característica de un modelo de secuenciación de trabajos es la configuración de sus máquinas y según ella existen diferentes tipos de problemas como lo son los problemas de máquina simple, de máquinas paralelas, de tipo taller, taller de flujo, etc [3]. Es importante mencionar que en muchas empresas se presentan problemas de secuenciación de trabajos, los cuales son complicados para encontrar soluciones [32].

Un problema de una sola máquina como su nombre lo dice consiste en una sola máquina para procesar cierto número de trabajos. [38] menciona que muchos

sistemas de producción dan lugar a modelos de una sola máquina. También destaca que estos modelos son importantes cuando se tiene problemas de secuenciación en ambientes de máquinas que están más complicados los cuales se pueden dividir en un conjunto de problemas más pequeños de secuenciación de una sola máquina, esto es para facilitar el problema. Los modelos de una sola máquina han sido analizados muy a fondo con todo tipo de condiciones y con muchas funciones objetivo diferentes. El resultado es un conjunto de reglas que arrojan soluciones óptimas en ambientes de una sola máquina, en [23] y [4] se ven algunas reglas como:

1. Primer trabajo que llega primero que sale (*First Come-First Served*)
2. Tiempo de proceso más corto (*Shortest Process Time*)
3. Fecha de vencimiento más próxima (*Earliest Due Date*)
4. La regla razón crítica (*Critical Ratio*).

Otro tipo de modelo de secuenciación son las máquinas en paralelo, las cuales son una generalización del modelo de una sola máquina. Muchos entornos de producción consisten de varias etapas o centros de trabajo, cada uno con una serie de máquinas en paralelo. Las máquinas de un centro de trabajo pueden ser idénticas, esto quiere decir que un trabajo puede ser procesado en cualquiera de las máquinas disponibles. Muchas veces las máquinas en paralelo pueden no ser exactamente idénticas, por ejemplo, se puede decir que se cuenta con algunas máquinas que sean mas antiguas que otras y así funcionar más lento, o algunas pueden estar en muy buenas condiciones y podrán ser capaces de realizar un trabajo más rápido y con mejor calidad, si estos son los casos, entonces algunos trabajos pueden ser procesados solamente en cierto numero de máquinas. Cuando se tiene que las máquinas son personas [17], entonces el tiempo de proceso de una cierta operación puede depender tanto del trabajo, como de la persona u operador, por ejemplo, un operador puede ser muy bueno en ciertos tipos de trabajos mientras que otros operadores pueden ser mejores en otros. Para resolver problemas con máquinas paralelas se pueden utilizar heurísticas, metaheurísticas, algoritmos genéticos por mencionar algunos. Por ejemplo, en [42] se presenta un algoritmo genético para resolver un problema de secuenciación de

trabajos en un sistema de máquinas paralelas en este caso idénticas, con tiempos de preparación dependientes de la secuencia, teniendo como objetivo minimizar el *Makespan*. En [5] proponen heurísticas *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*, *GRASP* para poder resolver problemas de secuenciación de trabajos con máquinas paralelas no relacionadas con tiempos de preparación dependientes de la secuencia minimizando el *Makespan*.

En [38] menciona otros entornos de problemas de secuenciación de trabajos como el de taller de flujo donde los trabajos pasan por una serie de máquinas diferentes, aquí las rutas de todos los trabajos son idénticas, es decir, todos los trabajos visitan las mismas máquinas en la misma secuencia. Una característica importante es que las máquinas son configuradas en serie y cada vez que un trabajo completa su procesamiento en una máquina se une a la fila para la siguiente. La secuencia de los trabajos puede variar de máquina a máquina, ya que pueden ser resecuenciados entre máquinas. Sin embargo, si hay un sistema de manejo de materiales que transporta los trabajos desde una máquina a la siguiente, entonces se mantiene la misma secuencia de trabajo en todo el sistema. Una generalización del taller de flujo es el llamado taller de flujo flexible, que consiste en un número de etapas en serie, donde cada etapa esta formada por un número de máquinas en paralelo. En cada etapa se puede procesar un trabajo en cualquiera de las máquinas en paralelo.

Por otra parte tenemos los problemas de secuenciación de trabajos de tipo taller mejor conocidos en la literatura como *Job Shop Scheduling Problem* los cuales son una generalización de un problema de secuenciación de trabajos tipo taller de flujo como lo mencionan [6] y [38]. En muchos problemas los trabajos pueden tener diferentes rutas [31]. En un modelo simple de *Job shop* se asume que un trabajo puede ser procesado en una máquina particular a lo más una vez en su ruta a través del sistema, en otros, un trabajo puede visitar una máquina particular varias veces en su ruta a través del sistema. Se dice que estos talleres están sujetas a recirculación lo cual aumenta considerablemente la complejidad del modelo. Una generalización del problema de tipo taller es el llamado secuenciación de trabajos tipo taller flexible

con centros de trabajo que tienen múltiples máquinas en paralelo [15].

## 2.2 CARACTERÍSTICAS DE PROCESAMIENTO Y RESTRICCIONES

En esta sección se describen algunas de las características de procesamiento y restricciones más comunes en los ambientes de problemas de secuenciación de trabajos.

El procesamiento de los trabajos tiene muchas características distintas y a menudo están sujetas a restricciones particulares, como podemos mencionar las restricciones de precedencia, de centro trabajo, de ruteo [38].

### 2.2.1 RESTRICCIONES DE PRECEDENCIA

En los problemas de secuenciación un trabajo a menudo sólo puede comenzar después de que un conjunto de trabajos dados han sido completados, tales restricciones son conocidas como restricciones de precedencia y se puede representar mediante un grafo de restricciones de precedencia (ver figura 2.1) [38] y [37].

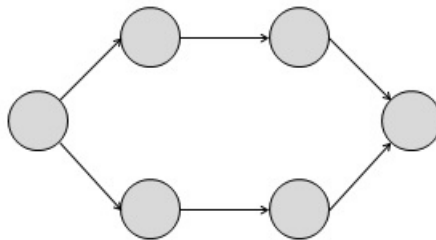


Figura 2.1: Grafo de restricciones de precedencia

### 2.2.2 RESTRICCIONES DE CENTRO DE TRABAJOS

Una máquina a menudo requiere uno o más operadores específicos para procesar un trabajo, los trabajos que necesitan procesamiento en una máquina pueden esperar hasta que uno de los operadores se encuentre disponible. Un personal puede consistir de varios *pools*, cada *pool* consiste de operadores con un conjunto de habilidades específicas [38].

### 2.2.3 RESTRICCIONES DE RUTEO

Las restricciones de ruteo especifican la ruta de un trabajo que debe seguir mediante un sistema, una tarea dada puede consistir de un número de operadores que tienen que ser procesados en una secuencia u orden dado, también especifican el orden en el cual un trabajo debe visitar en varias máquinas [6] y [38].

### 2.2.4 SECUENCIA DEPENDIENTE DE LOS TIEMPOS Y COSTOS DE PREPARACIÓN

Se sabe que las máquinas en ambientes de problemas de secuenciación deben de ser reconfiguradas o limpiadas entre los trabajos, esto es llamado o conocido como un cambio o una preparación. Si la longitud de la preparación depende del trabajo que se acaba de completar y de la que está por iniciar, entonces los tiempos de la configuración depender de la secuencia [3] y [38].



## 2.3 MEDIDAS DE DESEMPEÑO Y OBJETIVOS

Esta sección explica algunas medidas de desempeño y objetivos más importantes usados comúnmente en ambientes de problemas de secuenciación de trabajos.

### 2.3.1 OBJETIVO MAKESPAN

El *Makespan*, denotado por  $C_{max}$ , se define como el tiempo cuando el último trabajo sale del sistema, es decir;  $C_{max} = \max(C_1, \dots, C_n)$  donde  $C_j$  es el tiempo de completar el trabajo  $j$ . El objetivo *Makespan* es importante cuando hay un finito número de trabajos. En la mayoría de los problemas se requiere minimizar el *Makespan*, [18] menciona que la minimización del *Makespan* específicamente en un problema de taller de flujo ha sido un tema abordado intensamente durante los últimos 40 años, donde la mayor parte del esfuerzo de investigación se ha dedicado en desarrollar procedimientos heurísticos para dar buenas soluciones ya que el problema es conocido como NP-difícil para más de dos máquinas [38], [37] y [6].

### 2.3.2 OBJETIVOS RELACIONADOS CON LA FECHA DE VENCIMIENTO

Existen objetivos importantes que están relacionado con la fecha de vencimiento, primero el programador está a menudo interesado en minimizar el máximo retraso. Los trabajos retrasados son definidos de la siguiente manera: Sea  $d_j$  la fecha de vencimiento del trabajo  $j$ , el retraso del trabajo  $j$  es entonces  $L_j = C_j - d_j$ . El máximo retraso es definido como  $L_{max} = \max(L_1, \dots, L_n)$  [38].

Cuando se tiene que minimizar el máximo retraso es en esencia minimizar el peor desempeño de la secuencia [38].

Un objetivo importante relacionado con la fecha de vencimiento es el número de trabajos tardíos. Este objetivo no se centra sobre como tarda un trabajo si no solo de si es o no es tardío [38] y [39].

Otro objetivo es la llamada tardanza total o equivalentemente, promedio de la tardanza. La tardanza del trabajo  $j$  está definida como  $T_j = \max(C_j - dj, 0)$  y la función objetivo es:

$$\sum_{j=1}^n T_j.$$

Ahora supongamos que diferentes trabajos llevan diferentes prioridades de peso, donde el peso del trabajo  $j$  es  $w_j$ . Cuanto mayor sea el peso del trabajo más importante es, entonces una versión más general de la función objetivo es la tardanza total ponderada sería [38]:

$$\sum_{j=1}^n w_j T_j.$$

### 2.3.3 COSTOS DE PREPARACIÓN

A veces es bueno minimizar los tiempos de preparación cuando la tasa de rendimiento tiene que ser maximizada o el *Makespan* tiene que ser minimizado. Por lo tanto existen situaciones con tiempo de preparación insignificantes  $S_{ijk}$  pero con costos de preparación  $C_{ijk}^s$  (si los costos de preparación son solos costos en el modelo entonces el subíndice  $s$  puede ser omitido). Los costos de preparación no son necesariamente proporcionales a los tiempos de preparación [38].

## 2.4 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SECUENCIACIÓN

En esta sección se presentan algunas herramientas matemáticas que ayudan a encontrar soluciones en los ambientes de problemas de secuenciación de trabajo.

### 2.4.1 MODELOS DE ÚNICA MÁQUINA

Una única máquina es el caso más simple de un job shop y un ambiente de máquinas en paralelo es equivalente a la problema tipo taller flexible que está compuesta por un solo centro de trabajo. Las técnicas de descomposición para los problemas más complejos de job shop a menudo se tiene que considerar una sola máquina y problemas derivados de las máquinas en paralelo dentro de su estructura [9] y [12].

Consideramos una máquina única y  $n$  trabajos. Un trabajo  $j$  tiene un tiempo de procesamiento  $p_j$ , una fecha de lanzamiento  $r_j$  y una fecha de vencimiento  $d_j$ . Si  $r_j = 0$  y  $d_j = \infty$ , entonces el procesamiento del trabajo  $j$  está básicamente sin restricción.

Para varios objetivos ciertas reglas de prioridad generan la secuencia óptima [36], [35] y [22] .

Utilizaremos la tabla 2.1 para ordenar los trabajos según cada regla.

Trabajo	Peso	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de vencimiento
1	$w_1 = 4$	$p_1 = 6$	$r_1 = 0$	$d_1 = 8$
2	$w_2 = 2$	$p_2 = 2$	$r_2 = 0$	$d_2 = 6$
3	$w_3 = 5$	$p_3 = 8$	$r_3 = 0$	$d_3 = 18$
4	$w_4 = 3$	$p_4 = 3$	$r_4 = 0$	$d_4 = 15$
5	$w_5 = 1$	$p_5 = 9$	$r_5 = 0$	$d_5 = 23$

Tabla 2.1: Instancia para ejemplo de máquina única

La primera regla es la llamada primer trabajo en entrar primer trabajo en salir en la literatura llamada como First In First Out (FIFO), es una de las más utilizada y considera atender los trabajos según el orden de llegada, en el ejemplo consideraremos que los trabajos fueron recibidos en el siguiente orden: 1, 2, 3, 4, 5.

Trabajo	Tiempo de proceso	Tiempo de flujo	Fecha de vencimiento	Atraso
1	6	6	8	0
2	2	8	6	2
3	8	16	18	0
4	3	19	15	4
5	9	28	23	5
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>77</b>		<b>11</b>

Tabla 2.2: Regla FIFO

Existe otra regla llamada último trabajo que llega primero que sale en la literatura conocida como Last In First Out (LIFO) que es lo contraria a la regla FIFO, se atienden los trabajos en orden inverso al orden de llegado, en este caso el orden es: 5, 4, 3, 2, 1.

Trabajo	Tiempo de proceso	Tiempo de flujo	Fecha de vencimiento	Atraso
5	9	9	23	0
4	3	12	15	0
3	8	20	18	2
2	2	22	6	16
1	6	28	8	20
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>91</b>		<b>38</b>

Tabla 2.3: Regla LIFO

Si el objetivo es minimizar el total de los tiempos ponderados, es decir  $\sum w_j T_j$  y el procesamiento de los trabajos no tiene restricción, entonces la regla del tiempo ponderado de procesamiento más corto (WSPT) [45], que fija la secuenciación de los trabajos en el orden decreciente de  $w_j/p_j$ , es óptima. Por lo tanto la tabla 2.4 muestra los cocientes  $w_j/p_j$  de los trabajos  $j$ , y la secuencia óptima según la regla WSPT es 2, 4, 1, 3, 5 ó 4, 2, 1, 3, 5 ya que  $w_2/p_2 = w_4/p_4$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Tiempo de flujo	Fecha de entrega	Retraso	Peso	$w_j/p_j$
2	2	2	6	0	2	1
4	3	5	15	0	3	1
1	6	11	8	3	4	0.66
3	8	19	15	4	5	0.625
5	9	28	23	5	1	0.11
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>65</b>		<b>12</b>		

Tabla 2.4: Regla WSPT

Si el objetivo es el retraso máximo  $L_{max}$  y los trabajos son liberados en el tiempo 0, entonces la regla que se aplica es la de la fecha más temprana (EDD) [45], que fija las órdenes de trabajo según  $d_j$  es óptima, por lo tanto en la tabla 2.5 muestra el trabajo con su respectiva fecha de vencimiento  $d_j$  en orden creciente para



tener una secuencia de los trabajos de 2, 1, 4, 3, 5.

Trabajo	Tiempo de proceso	Tiempo de flujo	Fecha de entrega	Retraso
2	2	2	6	0
1	6	8	8	0
4	3	11	15	0
3	8	19	18	1
5	9	28	23	5
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>68</b>		<b>6</b>

Tabla 2.5: Regla EDD

En la regla de Razón Crítica los trabajos son secuenciados en orden creciente de acuerdo al cociente obtenido dividiendo la fecha de vencimiento entre el tiempo de proceso, en la tabla 2.6 muestra la secuencia de trabajos: 1, 3, 5, 2, 4.

Trabajo	Tiempo de proceso	Tiempo de flujo	Fecha de vencimiento	Atraso	RC
1	6	6	8	0	1.33
3	8	14	18	0	2.25
5	9	23	23	0	2.55
2	2	25	6	19	3
4	3	28	15	13	5
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>96</b>		<b>32</b>	

Tabla 2.6: Regla RC

Cuando los trabajos en un problema de una sola máquina tienen diferentes fechas de liberación  $r_j$  los problemas son más complicados. Un problema que ha sido ampliamente estudiado es el de programación para una sola máquina no preventiva en el que los trabajos tienen fechas diferentes de liberación y el retraso máximo  $L_{max}$  tiene que ser minimizado, este problema se considera no polinomial y desafortunadamente, no existe algoritmo en tiempo polinomial eficiente para solucionarlo [38]

y [28]. Sin embargo, el problema puede resolverse por ramificación y acotamiento o por la programación dinámica [46] y [1].

### 2.4.2 MODELO DE MÁQUINAS EN PARALELO

Un taller de máquinas paralelas consiste en un sistema de máquinas acomodadas en paralelo, las cuales procesan trabajos que requieren cierta operación, la cual puede realizarse en cualquiera de las máquinas, también se dice que existen diferentes métodos exactos y heurísticos, constructivo o de mejora para resolver la programación de este tipo de problemas [38]. El problema de taller de máquinas paralelas idénticas con tiempos de preparación dependientes de la secuencia consiste en resolver la programación de trabajos en un sistema con  $m$  máquinas que realizan operaciones iguales, presentadas en paralelo y  $n$  trabajos a procesar en una, y sólo una, de las máquinas [11]. El concepto de máquinas idénticas significa que cada trabajo puede ser procesado en cada una de las máquinas con el mismo tiempo de proceso. El tiempo de preparación en el que se incurre al procesar un trabajo en una máquina depende del trabajo previamente procesado en la misma [6] y [38]. El tiempo de proceso de cada trabajo está fijo y existen tiempos de preparación de máquinas que dependen del orden en el que se procesan los trabajos en cada una. El objetivo considerado es minimizar el *Makespan* ( $C_{max}$ ), que consiste en minimizar el intervalo de tiempo entre el inicio del procesamiento del primer trabajo y el tiempo de terminación del procesamiento del último trabajo. Se consideran los siguientes supuestos [42]:

1. Cada trabajo debe ser procesado en una, y sólo una, máquina  $k, k = 1, 2, \dots, m$ .
2. El tiempo de proceso del trabajo  $i$ , independiente de la máquina, está dado por  $p_i, i = 1, \dots, n$ .
3. Los tiempos de preparación (setup) para procesar el trabajo  $j$  después del trabajo  $i$ , independiente de la máquina, está dado por  $s_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ , donde  $s_{ij}$  representa la preparación inicial cuando el trabajo  $i$  es el primer trabajo procesado

en una máquina.

4. Cada máquina puede procesar sólo un trabajo a la vez.
5. El proceso de un trabajo en una máquina no se puede interrumpir (*nonpreemption*).
6. Todos los trabajos son independientes entre sí y se encuentran disponibles en el instante inicial.
7. Las máquinas operan sin fallas en el horizonte de programación.
8. El objetivo es minimizar  $C_{max}$ .

A continuación, se resuelve un problema de máquinas paralelas idénticas con tiempos de preparación dependientes de la secuencia con el objetivo de minimizar el *Makespan*, para esto tomamos una instancia dada en [42]: 1. Generar la secuencia de acuerdo a la regla LPT.

2. Asignar los  $m$  primeros trabajos a las  $m$  primeras máquinas.
3. Siguiendo la secuencia generada, fijar el trabajo siguiente en la máquina que termine antes de procesarlo considerando los tiempos de setup.

Consideramos un problema de 2 máquinas paralelas idénticas y 6 trabajos a programar, cuyos parámetros se presentan en las tablas 2.7 y 2.8 .

Trabajo	1	2	3	4	5	6
$p_i$	9	12	7	15	10	8

Tabla 2.7: Tiempos de proceso ( $p_i$ ) de los trabajos

Trabajo	1	2	3	4	5	6
1	3	8	6	7	2	4
2	9	6	5	4	2	7
3	6	7	4	8	4	9
4	7	8	7	4	6	6
5	8	4	3	9	2	3
6	6	5	4	9	3	2

Tabla 2.8: Matriz de tiempos de setup ( $s_{ij}$ )

Antes de empezar el método es importante especificar que, para planificar y ordenar trabajos de problemas de secuenciación a lo largo de un tiempo determinado, existe una herramienta gráfica llamada Diagrama de Gantt, la cual fue desarrollada por Henry Laurence Gantt a inicios del siglo XX, para más información ver [47].

Primero ordenamos los trabajos de acuerdo a la regla *Longest Processing Time (LPT)* (ver tabla 2.9).

Trabajo	4	2	5	1	6	3
$p_i$	15	12	10	9	8	7

Tabla 2.9: Orden de los trabajos de acuerdo a la regla *LPT*

Primero asignamos el trabajo 4 en alguna de las dos máquinas disponibles, elegimos la máquina 2 y calculamos el tiempo de terminación 0(tiempo en el que está disponible la máquina) + 4(setup inicial) + 15(tiempo de proceso)=19, entonces el trabajo 2 se asigna a la máquina 1 con un tiempo de terminación de 0+6+12=18 (ver figura 2.2).

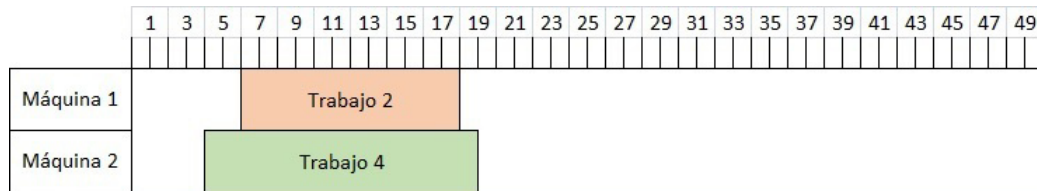


Figura 2.2: Procedimiento de asignación del trabajo 4 y 2

Después tenemos que asignar el trabajo 5 en la máquina 1 con un tiempo de terminación de 18+2+10=30, entonces el trabajo 1 en la máquina 2 con un tiempo de terminación de 19+7+9=35 (ver figura 2.3).

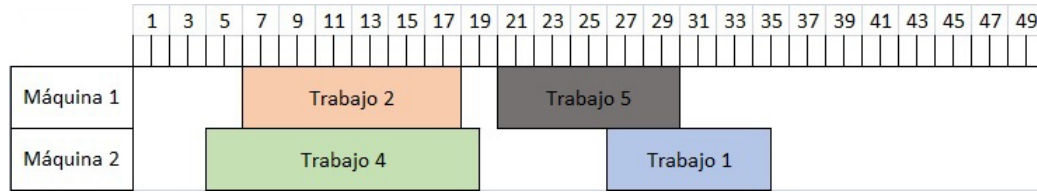


Figura 2.3: Procedimiento de asignación del trabajo 5 y 1

Faltaría asignar el trabajo 3 y 6. El trabajo 6 se asigna en la máquina 1 con un tiempo de terminación de  $30+3+8=41$ , y entonces el trabajo 3 se asigna en la máquina 2 con un tiempo de terminación de  $35+6+7=48$ . Como asignamos todos los trabajos en las máquinas llegamos a que el  $C_{max} = 48$  (ver figura 2.4).

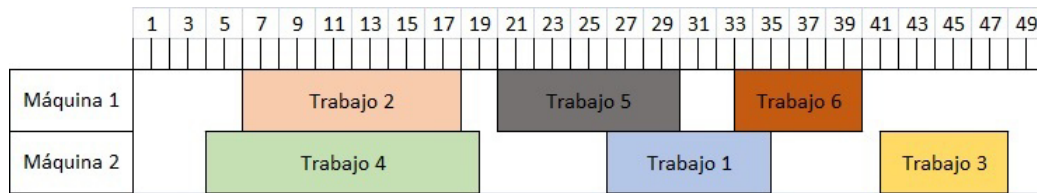


Figura 2.4: Procedimiento de asignación del trabajo 6 y 3

### 2.4.3 MODELO DE PLANEACIÓN Y ORDENAMIENTO DE TRABAJOS EN UN TALLER DE FLUJO

EL problema de secuenciación de tareas en un taller de flujo mejor conocido en la literatura como *Flow Shop Scheduling Problem (FSSP)* consiste en un conjunto de  $N$  trabajos que necesitan ser procesados en  $M$  máquinas en el mismo orden, cada trabajo tiene una operación en cada máquina y cada operación del trabajo  $j$  en la máquina  $i$  tiene un tiempo de proceso de  $p_{i,j}$ . En la figura 2.5 se observa la estructura de un sistema de Flow Shop donde la flechas me indican el seguimiento de los trabajos en las máquinas (triángulos, círculos y cuadrados), el orden en que los trabajos pasan por las máquinas es el mismo [6] y [19].

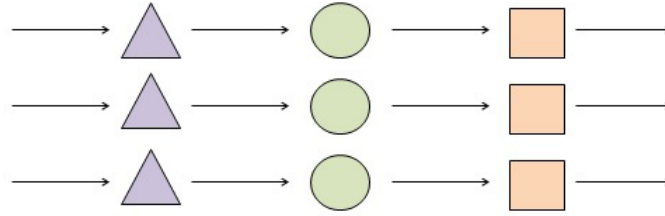


Figura 2.5: Sistema de Flow Shop

El *FSSP* se considera un problema NP-difícil cuando el número de máquinas es mayor o igual a 3 ( $M \geq 3$ ) [13] y [28]. Las soluciones óptimas solo pueden ser obtenidas mediante técnicas de enumeración tales como el método de Ramificación y corte (branch and bound) [25] y [24].

Existen heurísticas para resolver el problema de Flow Shop Scheduling las cuales se pueden dividir en 2 categorías: heurísticas de generación de secuencias y heurísticas de mejora [8].

#### 2.4.4 MODELO DE PLANEACIÓN Y ORDENAMIENTO DE TRABAJOS DE TIPO TALLER

En los problemas de secuenciación de trabajos de tipo taller se tiene  $N$  trabajos y cada trabajo visita un número de máquinas siguiendo una determinada ruta. En algunos modelos un trabajo puede visitar cualquier máquina dada a lo más una vez y en otros modelos un trabajo puede visitar cada máquina más de una vez, en este último caso decimos que el taller de trabajo está sujeto a recirculación. En la figura 2.6 se observa la estructura de un sistema de Job Shop donde las flechas indican el seguimiento de los trabajos en las máquinas (triángulos, círculos y cuadrados), aquí el orden de las máquinas no necesariamente es el mismo para los trabajos [38] y [6].

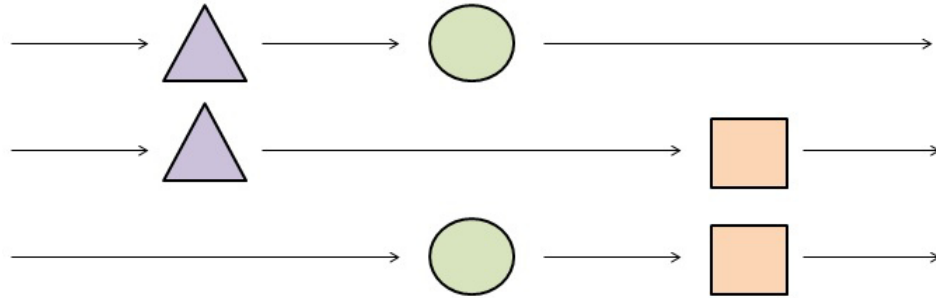


Figura 2.6: Sistema de Job Shop

Los problemas tipo taller en la literatura mejor conocidos como *Job shop* son frecuentes en industrias donde cada pedido del cliente es único y tiene sus propios parámetros [24].

Estos problemas de job shop son NP-difícil y no pueden ser formulados como programas lineales, sin embargo, pueden ser formulados ya sea como programas enteros o como programas disyuntivos los cuales son explicados más a fondo en el capítulo 3. Para más información acerca de la complejidad computacional de problemas de secuenciación de trabajos se pueden consultar los siguientes textos: [21], [20] y [26].

## CAPÍTULO 3

# PROGRAMACIÓN DISYUNTIVA Y LA HEURÍSTICA CUELLO DE BOTELLA MÓVIL

---

Este capítulo se explica el funcionamiento de dos métodos para resolver el problema de secuenciación de trabajos de tipo taller; el primero de ellos es un método exacto llamado Programación Disyuntiva y el segundo es una heurística llamada Cuello de Botella Móvil. Es importante mencionar que la programación disyuntiva explicada en este capítulo me va ayudar a encontrar una solución particular al problema del caso real del capítulo 4.

### 3.1 PROGRAMACIÓN DISYUNTIVA

Uno de los modelos matemáticos más utilizados para resolver problemas de secuenciación de trabajos de tipo taller es la programación lineal entera mixta [10]. Una técnica de este tipo lleva por nombre *Programación Disyuntiva* [37]. La Programación Disyuntiva fue propuesta por el Dr. Alan Manne en los años sesenta, más adelante fue desarrollada en los años setenta por el Dr. Edgon Balas, para más



detalle acerca de ello podemos ir a [7] y [30].

Cuando se tienen problemas de secuenciación de trabajos del tipo taller donde el objetivo es minimizar el *Makespan* sin que se presente recirculación se pueden representar por medio de los llamados grafos disyuntivos. Un grafo disyuntivo se define como sigue: Sea  $G(N, A, B)$  un grafo con un conjunto  $N$  de nodos, un conjunto  $A$  de arcos conjuntivos, y un conjunto  $B$  de arcos disyuntivos. Los nodos  $N$  representan las operaciones  $O_{ij}$  las cuales van a permitir la realización de los trabajos. El conjunto  $A$  de arcos denominados conjuntivos van a representar las rutas de los trabajos en sus respectivas máquinas, de aquí decimos que si el arco  $O_{ij} \rightarrow O_{hj} \in A$ ; entonces el trabajo  $j$  tiene que ser procesado primero en la máquina  $i$  y después en la máquina  $h$ . El conjunto  $B$  de arcos disyuntivos representan la conexión de 2 operaciones que pertenecen a dos trabajos distintos pero que tiene que ser procesados en una misma máquina. Además, se tiene una longitud para cada arco que sale de un nodo que es el tiempo de proceso  $p_{ij}$  de dicha operación [38].

### 3.1.1 APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DISYUNTIVA

Para ilustrar un grafo disyuntivo tomaremos una instancia dada por [41]. Se tienen 3 máquinas y 3 trabajos, la secuencia en las máquinas así como los tiempos de proceso se presentan en la tabla 3.1:

Tarea	Secuencia en la máquina	Tiempo de proceso
1	1,3	$p_{11} = 5, p_{31} = 3$
2	2,3	$p_{22} = 3, p_{32} = 2$
3	1,2	$p_{13} = 2, p_{23} = 4$

Tabla 3.1: Secuencia en la máquina y tiempo de proceso

El grafo disyuntivo correspondiente a la información proporcionada en la tabla 3.1 se puede ver en la figura 3.1 [38] y [33]:

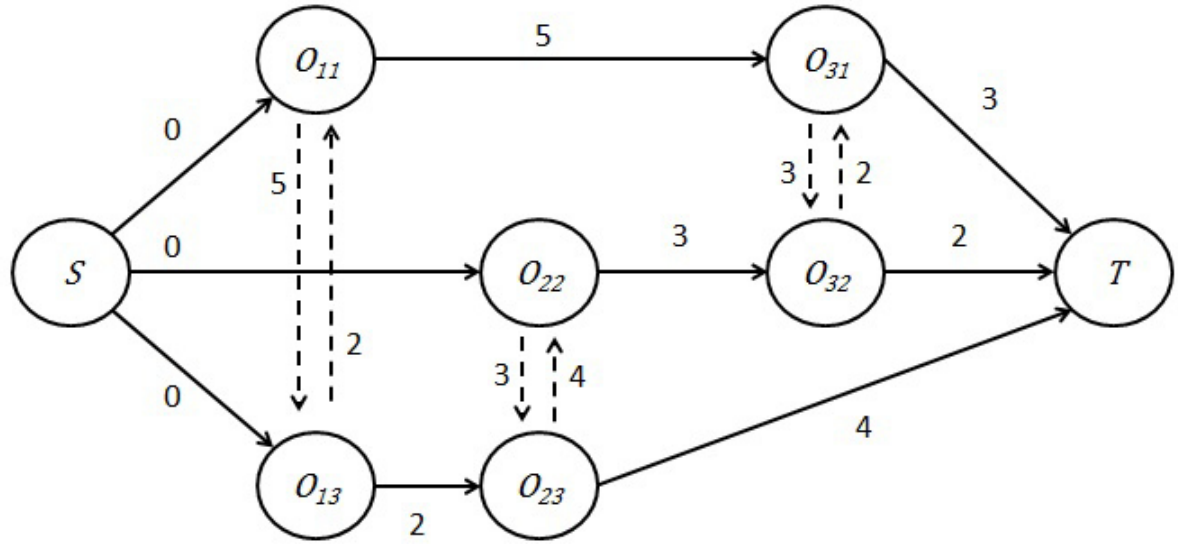


Figura 3.1: Grafo Disyuntivo

El grafo mostrado en la figura 3.1 está formado por ocho nodos; dos nodos ficticios  $S$  y  $T$ , y seis nodos  $O_{11}$ ,  $O_{31}$ ,  $O_{22}$ ,  $O_{32}$ ,  $O_{13}$ ,  $O_{23}$  que representan todas las operaciones de los trabajos en las máquinas. Se tienen dos conjuntos de arcos; los arcos conjuntivos y los disyuntivos. Los primeros conectan dos operaciones en un mismo trabajo, en otras palabras, representan la secuencia de como van a pasar los trabajos en las máquinas. El otro conjunto de arcos llamado disyuntivo conecta dos operaciones en una misma máquina, dichos arcos se encuentran en sentidos contrarios. Cada arco que sale de una operación tiene una longitud, que en este caso es el tiempo de proceso de dicha operación.

La formulación que se presenta es la programación disyuntiva, para esto se considera la variable  $y_{ij}$  la cual representa el tiempo de inicio de la operación  $O_{ij}$  [38].

El modelo matemático es el siguiente:

$$\text{Min } C_{max} \quad (3.1)$$

s.a

$$y_{hj} - y_{ij} \geq p_{ij} \quad \forall O_{ij} \rightarrow O_{hj} \in A \quad (3.2)$$

$$C_{max} - y_{ij} \geq p_{ij} \quad \forall O_{ij} \in N \quad (3.3)$$

$$y_{ij} - y_{ik} \geq p_{ik} \text{ o } y_{ik} - y_{ij} \geq p_{ij} \quad \forall O_{ik} \text{ y } O_{ij}, i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall O_{ij} \in N \quad (3.5)$$

La función objetivo mostrada por (3.1) minimiza el *Makespan*, el conjunto de restricciones (3.2) dice que la operación  $O_{hj}$  no puede comenzar antes de que la operación  $O_{ij}$  esté completada, el conjunto de restricciones (3.3) dice que el *Makespan* representado por la variable  $C_{max}$  debe ser mayor al tiempo de inicio más el tiempo de proceso de la operación  $O_{ij}$ , el conjunto de restricciones (3.4) dice que existe alguna secuencia entre trabajos diferentes pero que tienen que procesarse en la misma máquina, este conjunto de restricciones son las llamadas restricciones disyuntivas, y por último las restricciones (3.5) representan la naturaleza del modelo.

El modelo matemático correspondiente a los datos mostrados en la tabla 3.1 es el siguiente:

Sea

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } j \text{ va antes que } k \text{ en la máquina } i \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\text{Min } C_{max}$$

s.a

$$y_{31} - y_{11} \geq 5$$

$$y_{32} - y_{22} \geq 2$$

$$y_{23} - y_{13} \geq 2$$

$$C_{max} - y_{11} \geq 5$$

$$C_{max} - y_{31} \geq 3$$

$$C_{max} - y_{22} \geq 3$$

$$C_{max} - y_{32} \geq 2$$

$$C_{max} - y_{13} \geq 2$$

$$C_{max} - y_{23} \geq 4$$

$$y_{13} - y_{11} \geq 5 - M(1 - x_{113}) \quad y_{11} - y_{13} \geq 2 - M(1 - x_{131}) \quad x_{113} + x_{131} = 1$$

$$y_{23} - y_{22} \geq 3 - M(1 - x_{223}) \quad y_{22} - y_{23} \geq 4 - M(1 - x_{232}) \quad x_{223} + x_{232} = 1$$

$$y_{32} - y_{31} \geq 3 - M(1 - x_{312}) \quad y_{31} - y_{32} \geq 2 - M(1 - x_{321}) \quad x_{312} + x_{321} = 1$$

$$y_{11}, y_{13}, y_{23}, y_{22}, y_{32}, y_{31} \geq 0 \quad x_{ijk} = \{0, 1\}$$

Es importante mencionar que al momento de obtener el modelo matemático correspondiente a los datos proporcionados en la tabla 3.1 agregamos una nueva variable de decisión binaria, la cual se necesita al momento de modelar las restricciones disyuntivas.

El funcionamiento de la programación disyuntiva es el siguiente: al tener el grafo disyuntivo claramente se observa que existen arcos dobles entre 2 operaciones en una misma máquina, una selección de un arco por cada par de arcos disyuntivos sin que se presente un ciclo corresponde a una solución factible, dicha selección de arcos dirá cuál es el orden de los trabajos en la máquina correspondiente. Aquí es importante mencionar para  $n$  trabajos el número posible de secuencias es  $n!$  y si existe  $n$  trabajos que se pueden procesar en  $m$  máquinas, el número total de secuencias posibles es  $(n!)^m$  [14] y [43]. El objetivo es minimizar el *Makespan*, esto es, minimizar el máximo tiempo de terminación de los trabajos, para esto, al tener todos los grafos formados gracias a sus respectivas selecciones de arcos, se calculan en todas las rutas más largas del nodo  $S$  al nodo  $T$  y se selecciona la menor de ellas.

La figura 3.2 muestra todas las posibles selecciones de arcos de cada par, en esta instancia nos damos cuenta que no existen ciclos:

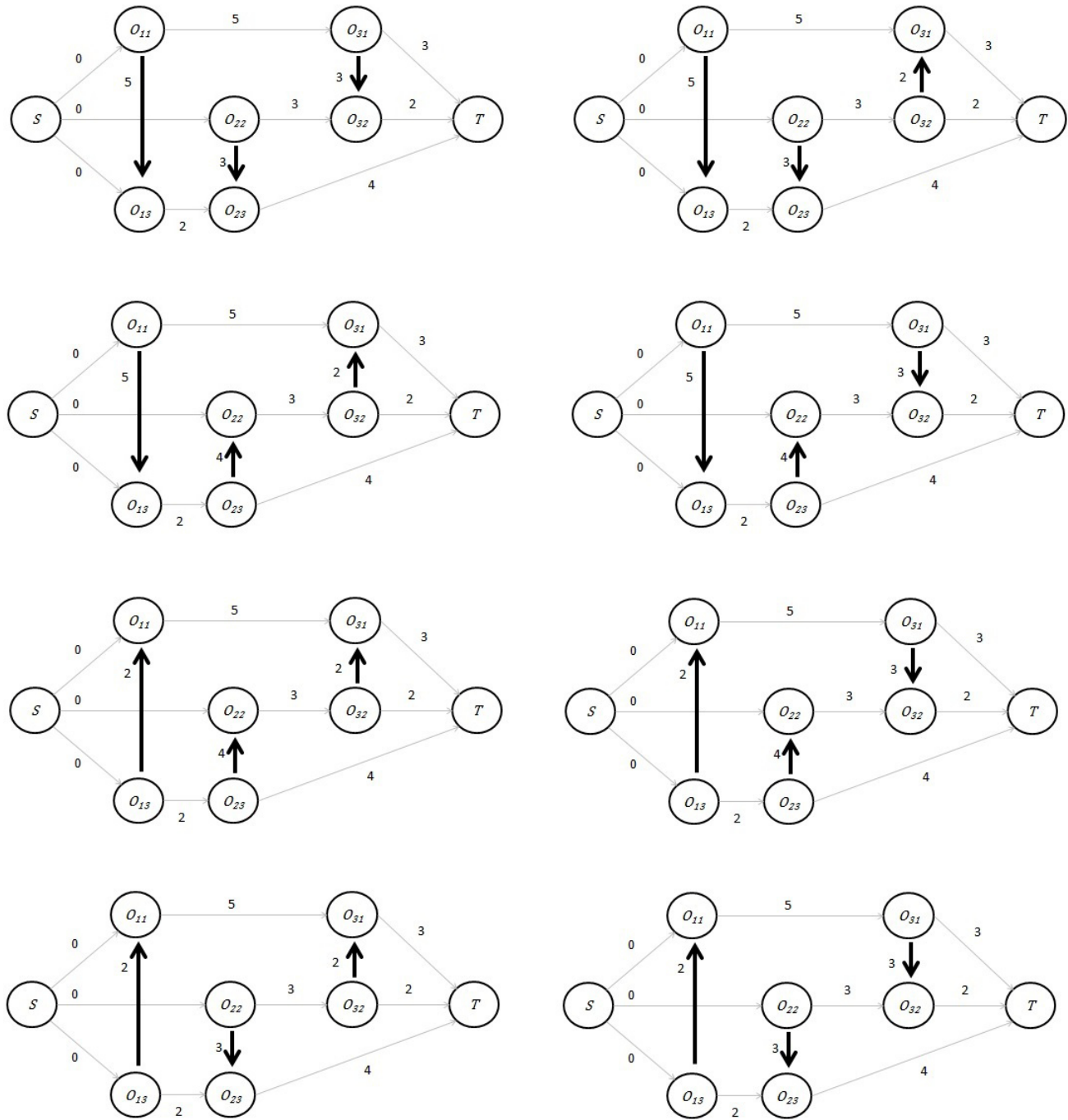


Figura 3.2: Selección de arcos disyuntivos

De todas las selecciones dadas en la figura 3.2 se obtienen las rutas más largas desde el nodo  $S$  al nodo  $T$  (ver figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10), esto equivale a los *Makespan* correspondientes por cada selección de arcos disyuntivos.

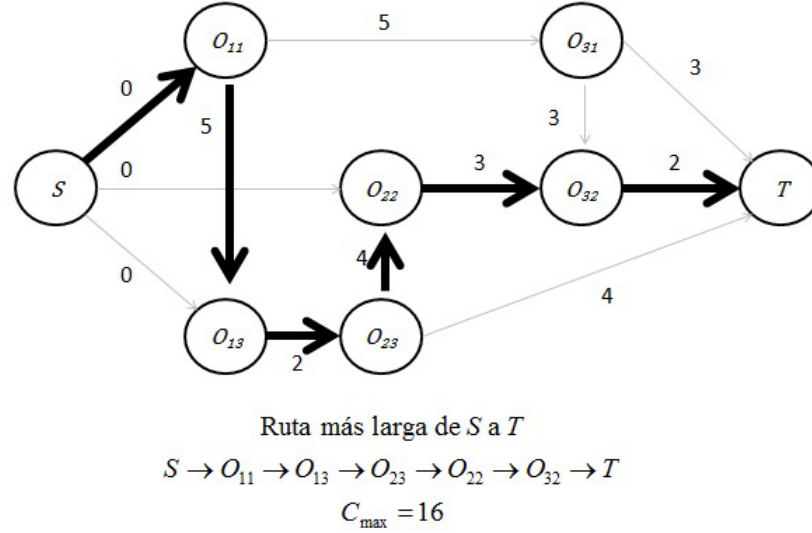


Figura 3.3: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{11} \rightarrow O_{13}$ ,  $O_{23} \rightarrow O_{22}$  y  $O_{31} \rightarrow O_{32}$

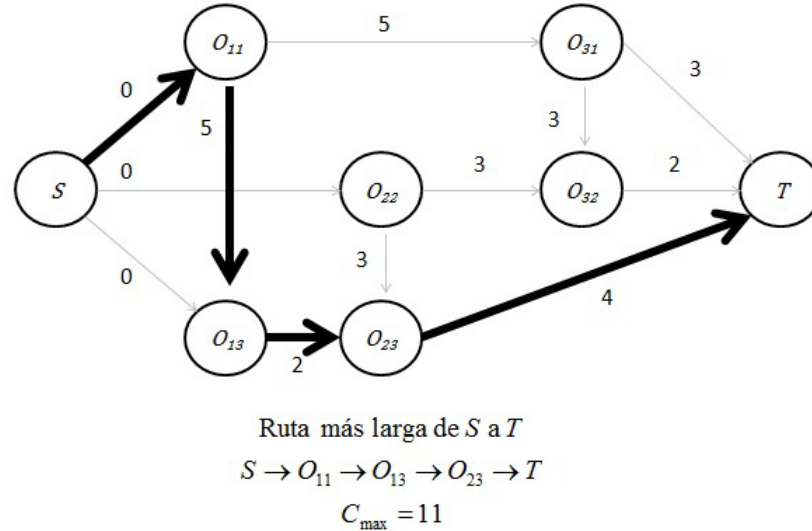


Figura 3.4: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{11} \rightarrow O_{13}$ ,  $O_{22} \rightarrow O_{23}$  y  $O_{31} \rightarrow O_{32}$

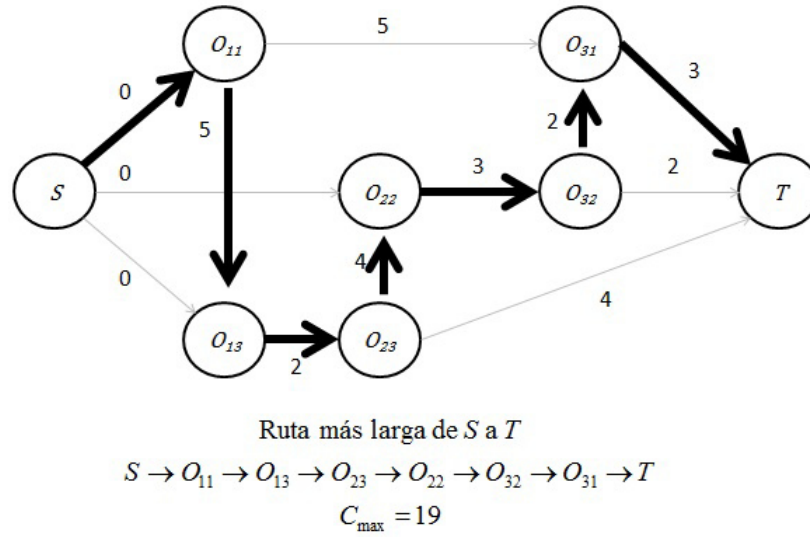


Figura 3.5: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{11} \rightarrow O_{13}$ ,  $O_{23} \rightarrow O_{22}$  y  $O_{32} \rightarrow O_{31}$

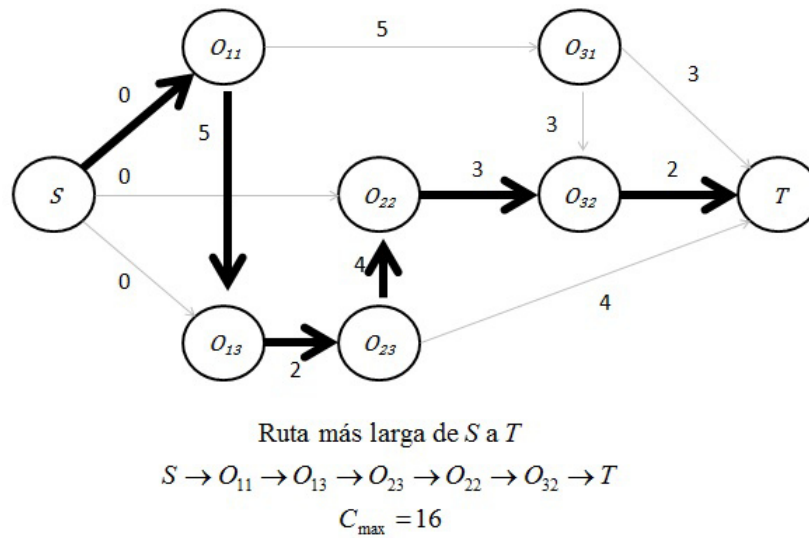


Figura 3.6: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{11} \rightarrow O_{13}$ ,  $O_{23} \rightarrow O_{22}$  y  $O_{31} \rightarrow O_{32}$



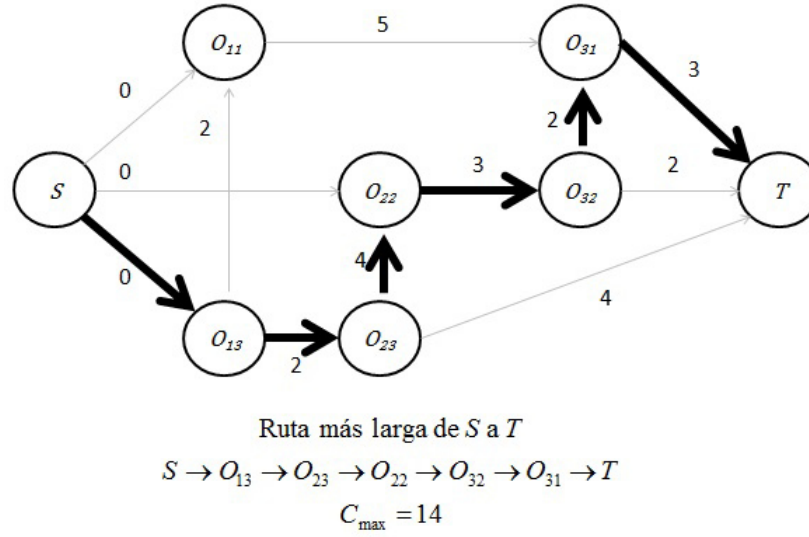


Figura 3.7: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{13} \rightarrow O_{11}$ ,  $O_{23} \rightarrow O_{22}$  y  $O_{32} \rightarrow O_{31}$

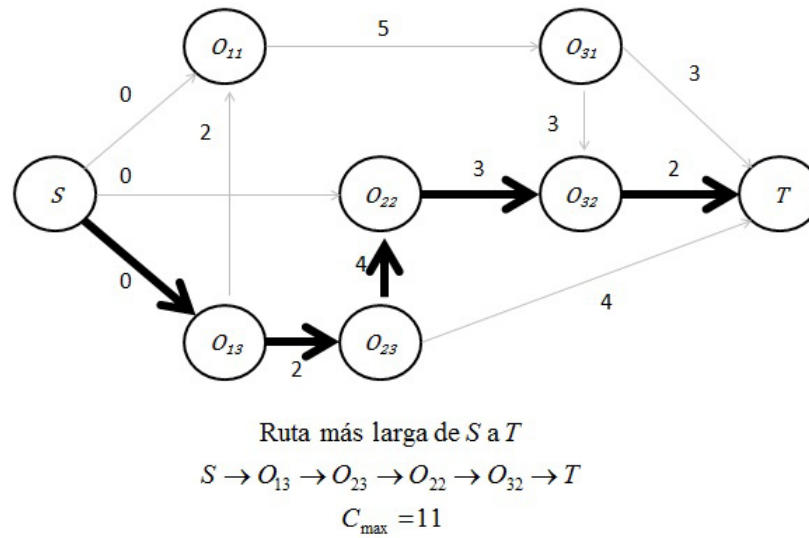


Figura 3.8: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{13} \rightarrow O_{11}$ ,  $O_{23} \rightarrow O_{22}$  y  $O_{31} \rightarrow O_{32}$

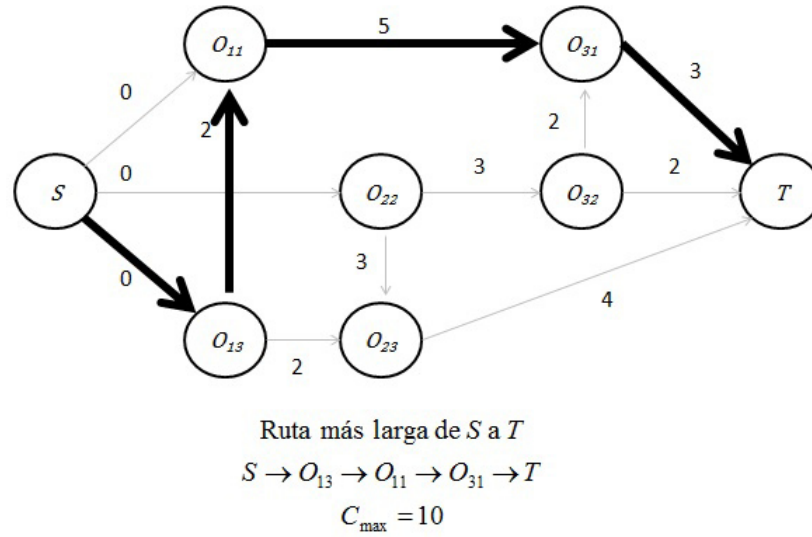


Figura 3.9: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{13} \rightarrow O_{11}$ ,  $O_{22} \rightarrow O_{23}$  y  $O_{32} \rightarrow O_{31}$

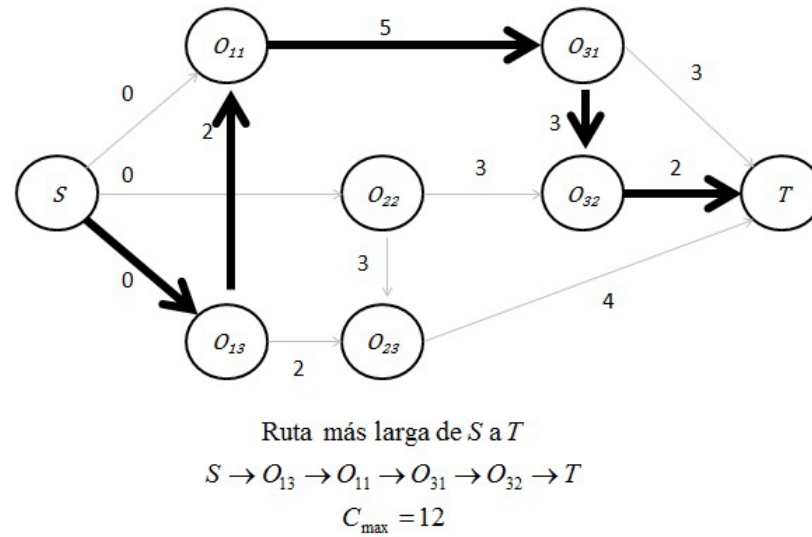


Figura 3.10: Ruta más larga de  $S$  a  $T$  seleccionando los arcos disyuntivos  $O_{13} \rightarrow O_{11}$ ,  $O_{22} \rightarrow O_{23}$  y  $O_{31} \rightarrow O_{32}$

Por último, de todas las rutas más largas escogemos la menor de todas. Recordemos que el objetivo del modelo matemático es minimizar el *Makespan*, entonces la mínima ruta más larga está dada por el grafo de la figura 3.11, la cual es  $S \rightarrow O_{13} \rightarrow O_{11} \rightarrow O_{31} \rightarrow T$  con un *Makespan* de 10.

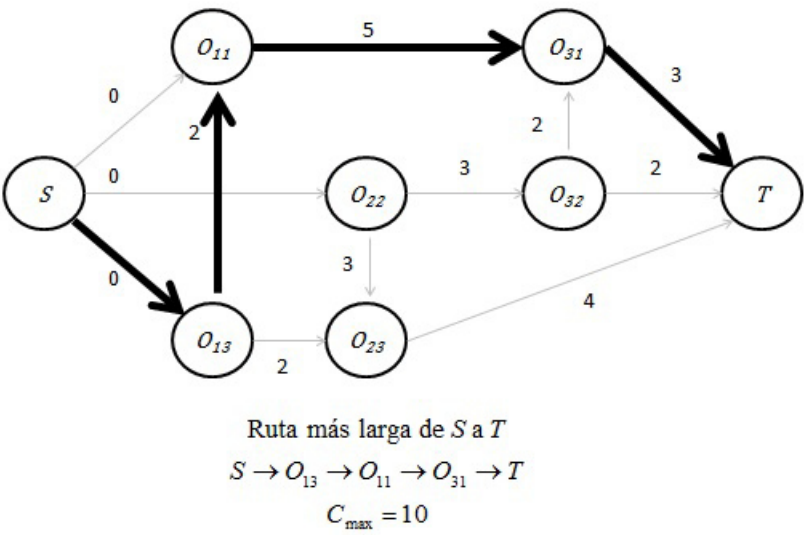


Figura 3.11: Mínima ruta más larga

La solución correspondiente al ejemplo puede representarse por medio de un Diagrama de Gantt (ver figura 3.12).

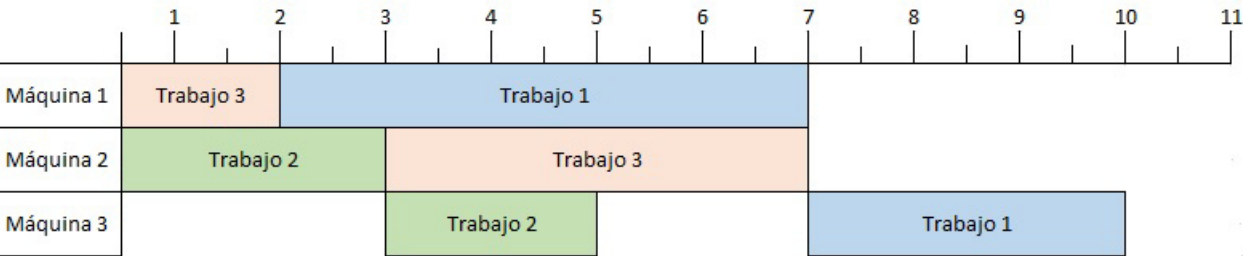


Figura 3.12: Diagrama de Gantt

A continuación se tomó una instancia del texto [38] donde se tienen 4 máquinas y 3 trabajos, la secuencia en las máquinas así como los tiempos de proceso se presentan en la tabla 3.2:

Tarea	Secuencia en la máquina	Tiempo de proceso
1	1,2,3	$p_{11} = 10, p_{21} = 8, p_{31} = 4$
2	2,1,4,3	$p_{22} = 8, p_{12} = 3, p_{12} = 5, p_{32} = 6$
3	1,2,4	$p_{13} = 4, p_{23} = 7, p_{41} = 3$

Tabla 3.2: Secuencia en la máquina y tiempo de proceso

El grafo disyuntivo correspondiente a la información proporcionada en la tabla 3.2 se observa en la figura 3.13.

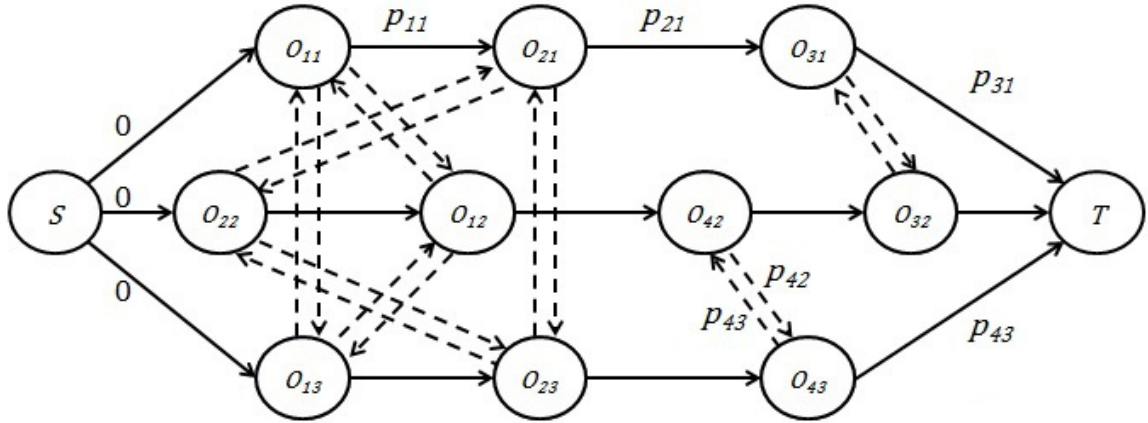


Figura 3.13: Grafo Disyuntivo

El grafo mostrado en la figura 3.13 está formado por 12 nodos; 2 nodos  $S$  y  $T$  que son los nodos ficticios, y 10 nodos que representan todas las operaciones de los trabajos en las máquinas. Se tienen 2 conjuntos de arcos, los arcos conjuntivos y los disyuntivos, los primeros conectan 2 operaciones en un mismo trabajo, en otras palabras, representan la secuencia de cómo van a pasar los trabajos en las máquinas, el otro conjunto de arcos llamado disyuntivos, entre 2 operaciones en una

misma máquina existen 2 arcos que las conectan, los cuales se encuentran en sentidos contrarios. Cada arco que sale de una operación tiene una longitud, que en este caso es el tiempo de proceso de dicha operación.

El modelo matemático correspondiente a los datos mostrados en la tabla 3.1 es el siguiente:

Sea  $y_{ij}$  el tiempo de inicio del trabajo  $j$  en la máquina  $i$ .

Sea

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } j \text{ va antes que } k \text{ en la máquina } i \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\text{Min } C_{max}$$

s.a

$$y_{21} - y_{11} \geq 10$$

$$y_{31} - y_{21} \geq 8$$

$$y_{12} - y_{22} \geq 8$$

$$y_{42} - y_{12} \geq 3$$

$$y_{32} - y_{42} \geq 5$$

$$y_{23} - y_{13} \geq 4$$

$$y_{43} - y_{23} \geq 7$$

$$C_{max} - y_{11} \geq 10$$

$$C_{max} - y_{21} \geq 8$$

$$C_{max} - y_{31} \geq 4$$

$$C_{max} - y_{22} \geq 8$$

$$C_{max} - y_{12} \geq 3$$

$$C_{max} - y_{42} \geq 5$$

$$C_{max} - y_{32} \geq 6$$

$$C_{max} - y_{13} \geq 4$$

$$C_{max} - y_{23} \geq 7$$

$$C_{max} - y_{43} \geq 3$$

$$y_{12} - y_{11} \geq 10 - M(1 - x_{112}), \quad y_{11} - y_{12} \geq 3 - M(1 - x_{121}), \quad x_{112} + x_{121} = 1$$

$$y_{12} - y_{13} \geq 4 - M(1 - x_{132}), \quad y_{13} - y_{12} \geq 3 - M(1 - x_{123}), \quad x_{132} + x_{123} = 1$$

$$y_{11} - y_{13} \geq 4 - M(1 - x_{131}), \quad y_{13} - y_{11} \geq 10 - M(1 - x_{113}), \quad x_{131} + x_{113} = 1$$

$$y_{21} - y_{22} \geq 8 - M(1 - x_{221}), \quad y_{22} - y_{21} \geq 8 - M(1 - x_{212}), \quad x_{221} + x_{212} = 1$$

$$y_{22} - y_{23} \geq 7 - M(1 - x_{232}), \quad y_{23} - y_{22} \geq 8 - M(1 - x_{223}), \quad x_{232} + x_{223} = 1$$

$$y_{21} - y_{23} \geq 7 - M(1 - x_{231}), \quad y_{23} - y_{21} \geq 8 - M(1 - x_{213}), \quad x_{231} + x_{213} = 1$$

$$y_{31} - y_{32} \geq 6 - M(1 - x_{321}), \quad y_{32} - y_{31} \geq 4 - M(1 - x_{312}), \quad x_{321} + x_{312} = 1$$

$$y_{42} - y_{43} \geq 3 - M(1 - x_{432}), \quad y_{43} - y_{42} \geq 5 - M(1 - x_{423}), \quad x_{432} + x_{423} = 1$$

$$y_{11}, y_{31}, y_{21}, y_{22}, y_{32}, y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{33} \geq 0 \quad x_{ijk} = \{0, 1\}$$

Al momento de obtener el modelo matemático correspondiente a los datos proporcionados en la tabla 3.1 se agrega una nueva variable de decisión binaria, la cual se necesita al momento de modelar las restricciones disyuntivas.

El grafo disyuntivo de la figura 3.13 cuenta con arcos dobles entre 2 operaciones en una misma máquina, una selección de un arco por cada par de arcos disyuntivos sin que se presente un ciclo corresponde a una solución factible, esa selección de arcos dirán cuál es el orden de los trabajos en la máquina correspondiente. Como se mencionó en el ejemplo pasado el objetivo es minimizar el *Makespan*, al tener el grafo con sus respectivas selecciones de arcos se calcula la ruta más larga del nodo  $s$  al nodo  $T$ , esto corresponde al máximo tiempo de terminación de ese grafo con

sus selecciones, se busca todas las posibles selecciones de arcos, se calculan todas las rutas más larga de cada grafo formado por la selección de arcos, y al final se toma la menor, esto es equivalente a minimizar el *Makespan*.

Ilustraremos lo anterior con una selección de todas las posibles en cada para de arcos disyuntivos en el grafo de la figura 3.13.

La figura 3.14 va enfocada en los arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 1, de los 3 pares de arcos disyuntivos iniciales que se tenían entre las operaciones, se seleccionan los arcos  $O_{1,1} \rightarrow O_{1,3}$ ,  $O_{1,1} \rightarrow O_{1,2}$  y  $O_{1,3} \rightarrow O_{1,2}$ ; claramente se observa que no se presenta un ciclo, por ende es una selección factible.

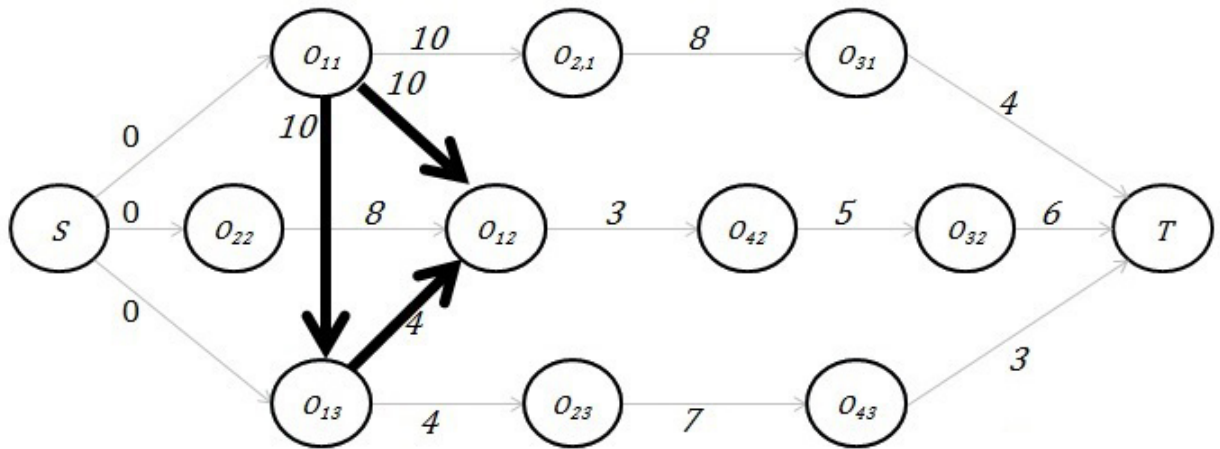


Figura 3.14: Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 1

La figura 3.15 corresponde a la selección de arcos de cada par de arcos disyuntivos correspondientes a las operaciones en la máquina 2, en esta ocasión se tomaron los arcos  $O_{2,2} \rightarrow O_{2,1}$ ,  $O_{2,2} \rightarrow O_{2,3}$  y  $O_{2,1} \rightarrow O_{2,3}$ .

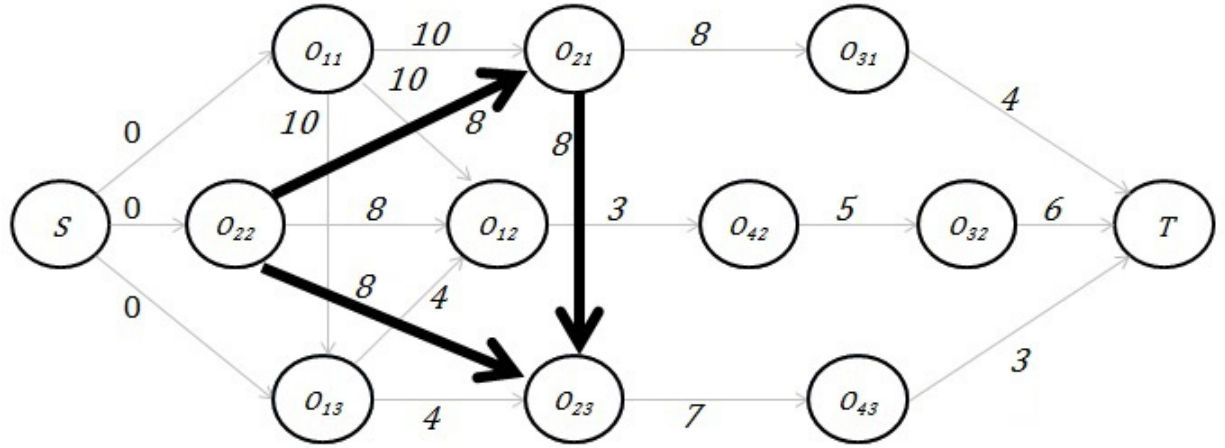


Figura 3.15: Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 2

Por último en la figura 3.16 se toman los arcos correspondientes a las operaciones de la máquina 3 y máquina 4, los arcos  $O_{3,1} \rightarrow O_{3,2}$  y  $O_{4,2} \rightarrow O_{4,3}$  respectivamente.

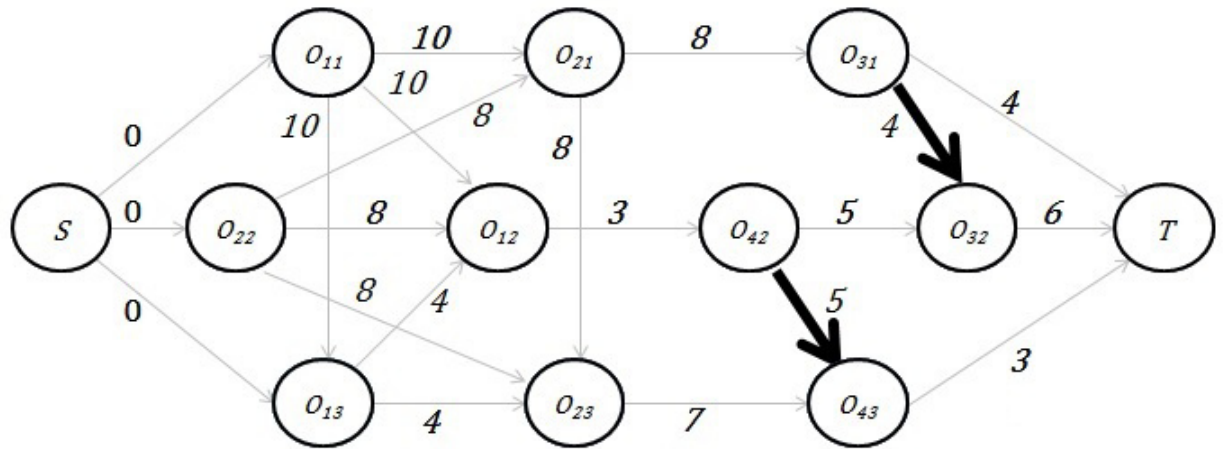


Figura 3.16: Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 3 y 4



Dada esta selección de arcos de cada par de arcos disyuntivos entre operaciones en una misma máquina se calcula la ruta más larga desde el nodo  $S$  al nodo  $T$ , la cual representará el máximo tiempo de terminación de los trabajos, esto se ilustra en la figura 3.17.

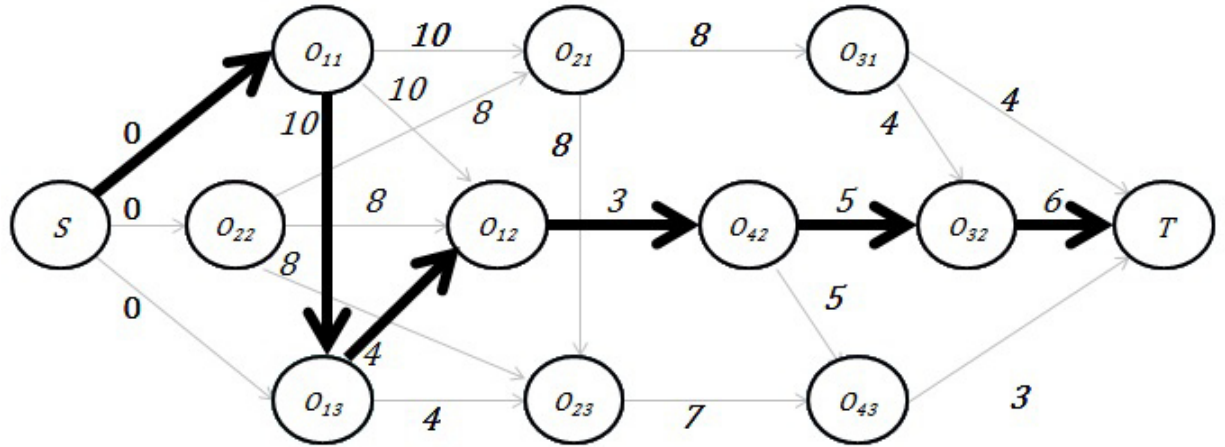


Figura 3.17: Ruta más larga del nodo  $S$  al nodo  $T$

La ruta más larga correspondiente a la figura 3.17 es:  $S \rightarrow O_{11} \rightarrow O_{13} \rightarrow O_{12} \rightarrow O_{42} \rightarrow O_{32} \rightarrow T$  y es igual a 28.

## 3.2 HEURÍSTICA CUELLO DE BOTELLA MÓVIL

Dado que resolver problemas de secuenciación de trabajos con una cantidad de trabajos considerable resulta ser muy complicado, se han diseñado varios procedimientos heurísticos, uno de los más eficaces para minimizar el *Makespan* es la heurística llamada Cuello de Botella Móvil mejor conocida en la literatura y en inglés como *Shifting Bottleneck Heuristic* [2].

La heurística Cuello de Botella Móvil consiste en la representación del problema mediante un grafo asegurando soluciones muy buenas, en algunos casos casi óptimas para problemas de secuenciación de trabajos. A partir de la representación del grafo se descompone el problema en problemas de maquina única para simplificar dicho problema y evitar que sea más complejo.

La idea es ir eligiendo cada una de las máquinas según la influencia en la función objetivo y en caso necesario resecuenciar en algunas de las maquinas que en las fases iniciales del algoritmo se hayan secuenciado.

En [39] se presenta la heurística Cuello de Botella Móvil para minimizar la tardanza total ponderada en un problema de secuenciación de trabajos tipo taller y en [34] consideran una modificación a la heurística de Cuello de Botella Móvil para problemas de tipo taller un poco más complejos.

El algoritmo 1 es tomado de [38], también se puede ver en [27] y [44].

---

**Algoritmo 1** Heurística Cuello de Botella Móvil

---

**Paso 1. Condiciones iniciales**

$M_0 = \emptyset$ .

$G'$  es el grafo con todos los arcos conjuntivos.

$C_{max}(M_0)$  es igual al camino más largo en el grafo  $G'$ .

**Paso 2. Análisis de las máquinas aún no programadas**

Formular un problema de máquina única con todas las operaciones sujetas a fechas de liberación y de entrega.

Minimizar el  $L_{max}$  en cada uno de los subproblemas de máquina única.

$L_{max}(i)$  denota el mínimo  $L_{max}$  de los subproblemas correspondientes a la máquina  $i$ .

**Paso 3. Selección del cuello de botella y secuenciación**

Sea

$$L_{max}(h) = \max_{i \in \{M - M_0\}} (L_{max}(i)) \quad (3.6)$$

la secuencia de la máquina  $h$  de acuerdo a la secuencia generada en el paso 2.

Insertar todos los arcos disyuntivos correspondientes en el grafo  $G'$ .

Insertar máquina  $h$  en  $M_0$ .

**Paso 4. Resecuenciación de todas las máquinas programadas mas temprano**

Hacer para cada máquina  $l \in \{M_0 - h\}$  lo siguiente:

Eliminar los arcos disyuntivos de  $G''$ ; formulando un subproblema de máquina única para la maquina  $l$ , con fechas de lanzamiento y de vencimiento de las operaciones determinadas por el camino más largo calculado en  $G$ .

Encontrar la secuencia que minimiza el  $L_{max}(l)$  e insertamos los correspondientes arcos disyuntivos en el grafo  $G'$ .

**Paso 5. Criterio de parada**

Si  $M_0 = M$  entonces paramos;

si no ir al paso 2.

---

### 3.2.1 APLICACIÓN DE LA HEURÍSTICA CUELLO DE BOTELLA MÓVIL

En esta parte se explica el funcionamiento de la heurística Cuello de Botella Móvil con una instancia tomada del texto [38].

Consideramos 4 máquinas y 3 trabajos, la secuencia en las máquinas y los tiempos de procesamiento están dados en la tabla 3.3.

Trabajo	Secuencia en la máquina	Tiempo de proceso
1	1,2,3	$p_{11} = 10, p_{21} = 8, p_{31} = 4$
2	2,1,4,3	$p_{22} = 8, p_{12} = 3, p_{12} = 5, p_{32} = 6$
3	1,2,4	$p_{13} = 4, p_{23} = 7, p_{41} = 3$

Tabla 3.3: Secuencia en la máquina y tiempo de proceso

Inicialmente, el conjunto  $M_0$  se encuentra vacío y el grafo  $G'$  solo tiene arcos conjuntivos como lo muestra la figura 3.18. Tanto el camino crítico como el *Makespan*  $C_{max}(\emptyset)$  son iguales al máximo tiempo total de proceso requerido por algún trabajo. El máximo tiempo es de 22 y se consigue en este caso por el trabajo 1 ( $S \rightarrow O_{11} \rightarrow O_{21} \rightarrow O_{31} \rightarrow V$ ) o por el trabajo 2 ( $S \rightarrow O_{22} \rightarrow O_{12} \rightarrow O_{42} \rightarrow O_{32} \rightarrow V$ ).

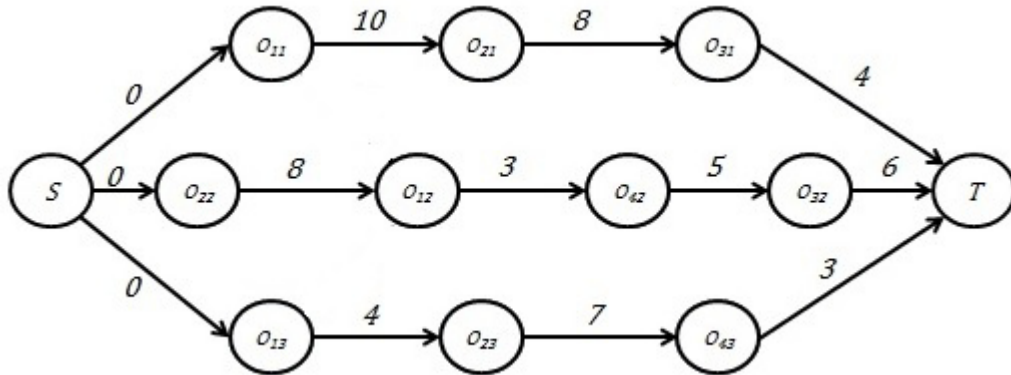


Figura 3.18: Inicio: Grafo con los arcos conjuntivos

Para determinar cuál será la primera secuencia, cada máquina es considerada como un problema no preventivo de máxima tardanza de máquina única con fecha de lanzamiento y de vencimiento determinado por el camino más largo en  $G'$  que en este caso es el *Makespan* de 22.

Los datos para el problema no preventivo de máxima tardanza de máquina única correspondientes a la máquina 1 están dados en la tabla 3.4. La secuencia óptima resulta ser 1, 2, 3 con  $L_{max}(l) = 5$ , como se mencionó en el capítulo 2 cuando en este tipo de problemas cuentan con diferentes fechas de liberación y se tiene que minimizar el retraso máximo se resuelve usando diferentes métodos uno de ellos es por ramificación y acotamiento, para más información de este método se puede consultar en [38], [29] y [40].

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{11} = 10$	$r_{11} = 0$	$d_{11} = 22 - (10 + 8 + 4) + 10 = 10$
2	$p_{12} = 3$	$r_{12} = 0 + 8 = 8$	$d_{12} = 22 - (3 + 5 + 6) + 3 = 11$
3	$p_{13} = 4$	$r_{13} = 0$	$d_{13} = 22 - (4 + 7 + 3) + 4 = 10$

Tabla 3.4: Datos correspondientes a la máquina 1

Los datos para el problema asociado a la máquina 2 se muestran en la tabla 3.5 y la secuencia para este problema es 2, 3, 1 con  $L_{max}(2) = 5$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{21} = 8$	$r_{21} = 10$	$d_{21} = 22 - (8 + 4) + 8 = 18$
2	$p_{22} = 8$	$r_{22} = 0$	$d_{22} = 22 - (8 + 3 + 5 + 6) + 8 = 8$
3	$p_{23} = 7$	$r_{23} = 4$	$d_{23} = 22 - (7 + 3) + 7 = 19$

Tabla 3.5: Datos correspondientes a la máquina 2

De la misma manera para la máquina 3 el tiempo de proceso, la fecha de lanzamiento y la fecha de entrega están dados por la tabla 3.6, obteniendo un  $L_{max}(3) = 4$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{31} = 4$	$r_{31} = 10 + 8 = 18$	$d_{31} = 22 - 4 + 4 = 22$
2	$p_{32} = 6$	$r_{32} = 8 + 3 + 5 = 16$	$d_{32} = 22 - 6 + 6 = 22$

Tabla 3.6: Datos correspondientes a la máquina 3

Por último se muestra en la tabla 3.7 los datos correspondientes a la máquina 4 llegando a un  $L_{max}(4) = 0$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
2	$p_{42} = 4$	$r_{42} = 8 + 3 = 11$	$d_{42} = 22 - (5 + 6) + 5 = 16$
3	$p_{43} = 6$	$r_{43} = 4 + 7 = 11$	$d_{43} = 22 - 3 + 3 = 22$

Tabla 3.7: Datos correspondientes a la máquina 4

Con los datos anteriores se deduce que la máquina 1 o la máquina 2 puede ser considerada como cuello de botella, seleccionamos de manera arbitraria la máquina 1 para incluirla en  $M_0$ .

La figura 3.19 nos muestra el grafo  $G''$  el cual es obtenido fijando los arcos disyuntivos correspondientes a la secuencia de los trabajos en la máquina 1. Con esto decimos que  $C_{max}(1) = C_{max}(\emptyset) + L_{max}(1) = 22 + 5 = 27$ .

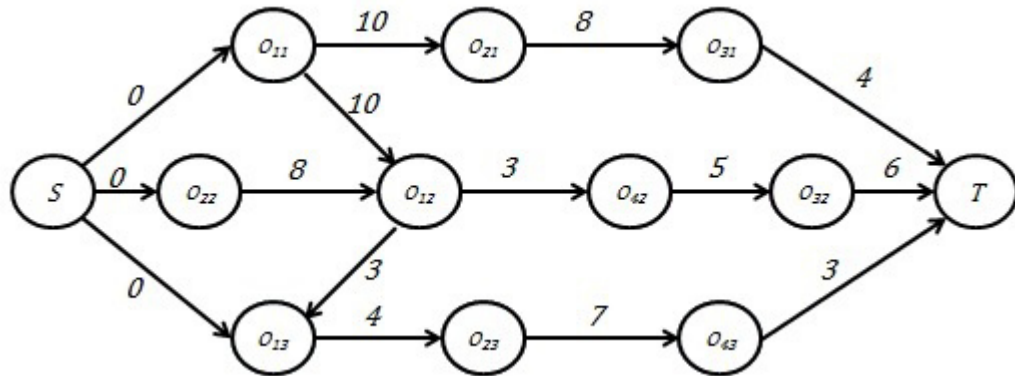


Figura 3.19: Iteración 1: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina

Después de esto ya se puede comenzar la siguiente iteración del algoritmo, sabiendo que el *Makespan* correspondiente de  $G'$  es 27, podemos determinar el camino crítico para este grafo el cual es  $S \rightarrow O_{11} \rightarrow O_{12} \rightarrow O_{13} \rightarrow O_{23} \rightarrow O_{43} \rightarrow V$ . Ahora las 3 máquinas restantes tendrán que ser analizadas una por una como problemas de máquina única.

Para la máquina 2 los datos correspondientes se muestran en la tabla 3.8 y la secuencia óptima es 2, 3, 2 con un  $L_{max}(2) = 1$

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{21} = 8$	$r_{21} = 10$	$d_{21} = 27 - (8 + 4) + 8 = 23$
2	$p_{22} = 8$	$r_{22} = 0$	$d_{22} = 27 - (8 + 3 + 4 + 7 + 3) + 8 = 10$
3	$p_{23} = 7$	$r_{23} = 10 + 4 + 3 = 17$	$d_{23} = 27 - (7 + 3) + 7 = 24$

Tabla 3.8: Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 2

Del mismo modo obtenemos los datos de la máquina 3 (ver tabla 3.9) llegando a la conclusión de que ambas secuencias son óptimas con un  $L_{max}(3) = 1$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{31} = 4$	$r_{31} = 10 + 8 = 18$	$d_{31} = 27 - 4 + 4 = 27$
2	$p_{32} = 6$	$r_{32} = 10 + 3 + 5 = 18$	$d_{32} = 27 - 6 + 6 = 27$

Tabla 3.9: Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 3

Por último obtenemos los datos correspondientes a la máquina 4 los cuales se muestran en la tabla 3.10 y el resultado sería  $L_{max}(4) = 0$ .

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
2	$p_{42} = 5$	$r_{42} = 10 + 3 = 13$	$d_{42} = 27 - (5 + 6) + 5 = 21$
3	$p_{43} = 3$	$r_{43} = 10 + 3 + 4 + 7 = 24$	$d_{43} = 27 - 3 + 3 = 27$

Tabla 3.10: Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 4

Se observa que existe nuevamente un empate, ahora entre la máquina 2 y la máquina 3, del mismo modo seleccionamos de manera arbitraria a la máquina 2 para incluirla al conjunto  $M_0$ . Por lo tanto  $M_0 = \{1, 2\}$  y  $C_{max}(1, 2) = C_{max}(\{1\}) + L_{max}(2) = 27 + 1 = 28$ .

Con esto se puede obtener el grafo  $G'''$  fijando los arcos disyuntivos correspondientes para la secuencia de trabajos en la máquina 2 en el grafo  $G''$  (ver figura 3.20). En esta iteración podemos hacer un intento para disminuir el  $C_{max}(1, 2)$  por resecuenciación de la máquina 1, mostrando que la máquina 1 no da ninguna mejora y continuamos con la siguiente iteración.

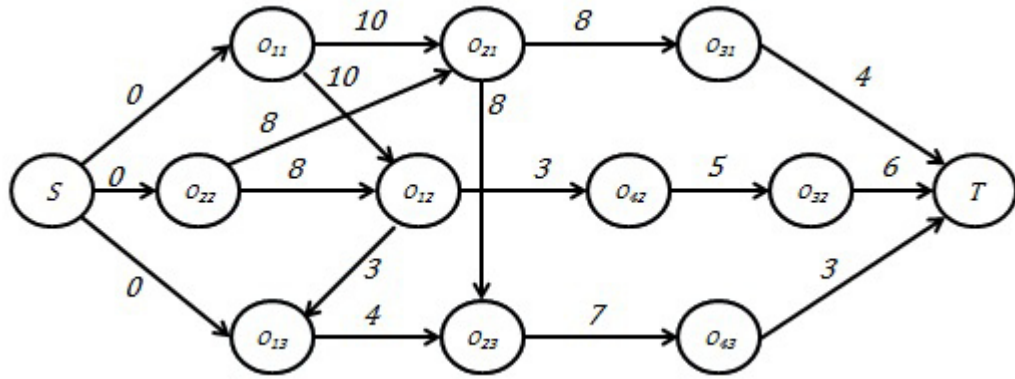


Figura 3.20: Iteración 2: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 2

Ahora el camino crítico en  $G'''$  es  $S \rightarrow O_{11} \rightarrow O_{21} \rightarrow O_{23} \rightarrow O_{43} \rightarrow V$  y tanto la máquina 3 como la 4 serán analizadas separadamente.

Los datos correspondientes a la máquina 3 y a la máquina 4 se muestran en las tablas 3.11 y 3.12 respectivamente y se observa que ambos problemas tienen una tardanza máxima de 0, concluyendo que ninguna de estas máquinas representa un cuello de botella.



Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
1	$p_{31} = 4$	$r_{31} = 10 + 8 = 18$	$d_{31} = 28 - 4 + 4 = 28$
2	$p_{32} = 6$	$r_{32} = 10 + 3 + 5 = 18$	$d_{32} = 28 - 6 + 6 = 28$

Tabla 3.11: Iteración 3: Datos correspondientes a la máquina 3

Trabajo	Tiempo de proceso	Fecha de lanzamiento	Fecha de entrega
2	$p_{42} = 5$	$r_{42} = 10 + 3 = 13$	$d_{42} = 28 - (5 + 6) + 5 = 22$
3	$p_{43} = 3$	$r_{43} = 25$	$d_{43} = 28 - 3 + 3 = 28$

Tabla 3.12: Iteración 3: Datos correspondientes a la máquina 4

Por último determinamos la secuencia final de los trabajos en cada máquina mostrando el grafo resultante en la figura 3.21

*La secuencia de trabajos en la máquina 1 es 1, 2, 3.*

*La secuencia de trabajos en la máquina 2 es 2, 1, 3.*

*La secuencia de trabajos en la máquina 3 es 2, 1.*

*La secuencia de trabajos en la máquina 4 es 2, 3.*

*El Makespan es de 28.*

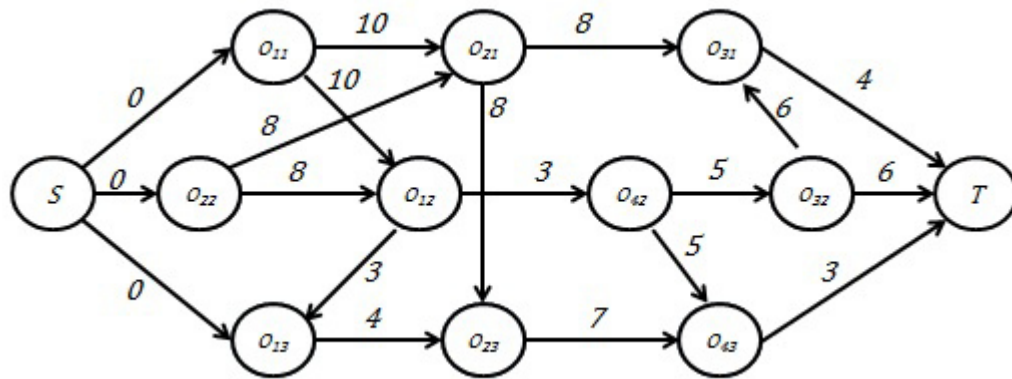


Figura 3.21: Iteración 3: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 3 y 4

## CAPÍTULO 4

# CASO DE ESTUDIO

---

En este capítulo se presenta un problema real en una empresa que lleva por nombre *Diseños* y según las características que presenta el problema en la empresa se asoció con el problema de secuenciación de trabajos del tipo taller explicado en el capítulo 2 y 3. Para esto se tomaron datos, presentando el modelo matemático correspondiente dando una solución haciendo uso de la llamada programación disyuntiva.



Figura 4.1: Logotipo de la empresa Diseños

## 4.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA REAL

La empresa *Diseños* fue creada en el año 1991 y hasta el 2017 se ha mantenido vigente. Dicha empresa se encarga de elaborar productos de papel, para ser más específicos bolsas para joyería, relojería, perfumería, productos de belleza, como las mostradas en la figura 4.2, en ella se observan que se tienen bolsas de diferente modelo según el gusto o la necesidad del cliente.



Figura 4.2: Bolsas de papel

La figura 4.3 muestra algunos de los clientes que solicitan los productos que elabora la empresa *Diseños*.



Figura 4.3: Clientes

## 4.2 PROCESO DE ELABORACIÓN DE UNA BOLSA

El proceso de elaboración de la bolsa empieza cuando el cliente hace un pedido. Teniendo los pedidos de los clientes se comienza con la elaboración de la bolsa, el cual para llegar a obtener el producto final el pedido ocupa pasar por un cierto número de máquinas dependiendo el tipo de bolsa que ocupe el cliente. Llamaremos una operación cuando un pedido pasa por una máquina específica. Aquí es importante mencionar que la empresa cuenta con un sistema ser humano-máquina [17], esto quiere decir que se cuenta con personal altamente capacitado para realizar alguna operación. Dicho personal encargado de la elaboración de la bolsa sabe por qué máquinas debe pasar. La empresa cuenta con 17 máquinas por donde se puede realizar la operación y las operaciones son las siguientes:

- Corte del cordón
- Manufactura del asa
- Impresión del logotipo y secado
- Primer marca simple
- Primer marca doble
- Elaboración de la ceja
- Segunda marca doble
- Cierre del pliego
- Pegado
- Fuelle
- Doble en la parte superior
- El asa en la bolsa
- Perforación de la bolsa
- Base de la bolsa
- Pegado de la base
- Cordón en la bolsa
- Pegado del Cordón

### 4.2.0 CORTE DEL CORDÓN

La empresa dispone de rollos de cordón los cuales tienen que ser cortados de cierta medida por el personal, esta operación es llamada *corte del cordón* y es importante mencionar que no todos los pedidos ocupan de esta operación.



Figura 4.4: Corte del cordón

### 4.2.0 MANUFACTURA DEL ASA

Después de haber cortado el cordón, para ciertos pedidos se tiene que elaborar el asa. Esta operación es llamada *manufactura del asa* y es realizada por personal capacitado. La figura 4.5 muestra como pegar el cordón en el papel de tamaño específico con una pistola para silicón.



Figura 4.5: Manufactura del asa

### 4.2.0 IMPRESIÓN DEL LOGOTIPO Y SECADO

Los pliegos ocupan tener el logotipo de cliente impreso, para esto cada pliego pasa por una pantalla la cual tiene revelado el logotipo del cliente a imprimir, luego el pliego con la impresión fresca se lleva a un estante para el secado. La figura 4.6 muestra una de las pantallas junto con el estante; lugar donde se colocan los pliegos cuando vienen de imprimirse.

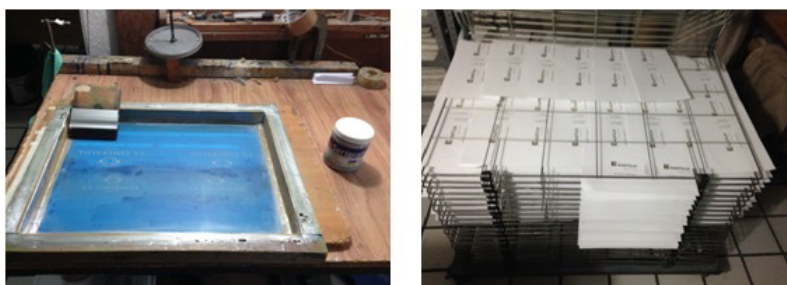


Figura 4.6: Impresión del logotipo y secado

### 4.2.0 PRIMER MARCA SIMPLE

La *primera marca simple* consiste en colocar el pliego en una máquina (ver figura 4.7), en esta operación la máquina cuenta inicialmente con 2 rodillos que ayudan a dejar 2 marcas en el pliego las cuales facilitan operaciones futuras pero en esta operación solo se ocupa de un rodillo para realizar una sola marca así que uno de los rodillos se quita.



Figura 4.7: Primera marca simple

### 4.2.0 PRIMER MARCA DOBLE

La *primer marca doble* se lleva a cabo en la máquina utilizada en el paso anterior solo que ahora sí requiere de los dos rodillos para las dos marcas. El pliego ya con la impresión seca se coloca de manera horizontal en la máquina para poder formar la primer marca doble misma que va facilitar el dobléz del pliego (ver figura 4.8).



Figura 4.8: Primer marca doble

### 4.2.0 SEGUNDA MARCA DOBLE

Para la llamada *segunda marca doble* el pliego se coloca ahora de manera vertical (ver figura 4.9), obviamente esto es después de la primer marca doble o de la primera marca simple. Aquí es importante mencionar que para poder usar la máquina el pliego debe tener un tamaño menor o igual que 41 cm de largo.



Figura 4.9: Segunda marca doble

### 4.2.0 ELABORACIÓN DE LA CEJA

La *elaboración de la ceja* consiste en colocar el pliego en una base de cartón especial para realizar un doblez, el cual va ayudar a darle fortaleza para que se efectúen pasos futuros. La figura 4.10 muestra la elaboración de la ceja.



Figura 4.10: Elaboración de la ceja

### 4.2.0 CIERRE DEL PLIEGO

Con ayuda de la segunda marca doble se efectúa el *cierre del pliego*. Como se muestra en la figura 4.11, este paso lo ejecuta un personal capacitado, todos los pedidos llevan esta operación.



Figura 4.11: Cierre del pliego



### 4.2.0 PEGADO

Cuando se tienen todos los pliegos cerrados, se llega al *pegado*. Usando una pistola para silicón se coloca el pegamento en la ceja para después unirlo con la otra parte del pliego, como lo muestra la figura 4.12. En todos los pedidos se presenta esta operación.



Figura 4.12: Pegado

### 4.2.0 FUELLE

Después de tener el pliego cerrado y pegado sigue realizar el *fuelle*, el cual es una serie de dobleces como los mostrados en la figura 4.13, para ir formando poco a poco la bolsa. En todos los pedidos se lleva acabo esta operación.



Figura 4.13: Fuelle

### 4.2.0 DOBLEZ EN LA PARTE SUPERIOR

El *doble en la parte superior* se facilita gracias a la primer marca doble, la parte superior de la bolsa se dobla hacia dentro. En la figura 4.14 se observa como se lleva a cabo esta operación, solo en algunos pedidos se efectúa.



Figura 4.14: Doble en la parte superior

### 4.2.0 EL ASA EN LA BOLSA

Cuando se tiene el doble en la parte superior y se tienen elaboradas las asas, se deben colocar por dentro de la bolsa exactamente en el doblez hecho en la parte superior como en la figura 4.15. El asa en doblez le da más resistencia al momento de trasladar la bolsa con el producto adentro. Aquí es importante mencionar que no todos los pedidos llevan esta operación.



Figura 4.15: El asa en la bolsa

### 4.2.0 PERFORACIÓN EN LA BOLSA

La *perforación en la bolsa* consiste en tomar la bolsa con el dobléz en la parte superior y colocarla en la máquina mostrada en la figura 4.16, la cual va perforar la bolsa formando 2 orificios. Como se mencionó al inicio no todos los pedidos ocupan esta operación.



Figura 4.16: Perforación en la bolsa

### 4.2.0 BASE DE LA BOLSA

Para llevar a cabo la *base de la bolsa* se hacen una serie de dobleces en la parte inferior de la bolsa, teniéndolos se coloca un cartón de cierto tamaño dependiendo de la bolsa para reforzar la base. La figura 4.17 muestra como es la elaboración de la base y es importante mencionar que todos los pedidos llevan esta operación.



Figura 4.17: Base de la bolsa

### 4.2.0 PEGADO DE LA BASE

Teniendo la base ya con el cartón adentro para reforzar la bolsa, sigue el *pegado de la base* usando una pistola silicón para pegar los extremos de la base y cerrarlo como lo muestra la figura 4.18. Todos los pedidos ocupan de esta operación.

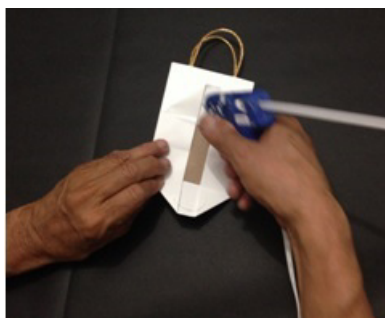


Figura 4.18: Pegado de la base

### 4.2.0 CORDÓN EN LA BOLSA

Teniendo los 2 orificios formados por la perforación de la bolsa, se coloca el cordón introduciendo un extremo por un orificio dándole la vuelta a la bolsa para que el mismo extremo salga por el otro orificio como se observa en la figura 4.19. No todos los pedidos ocupan de esta operación.

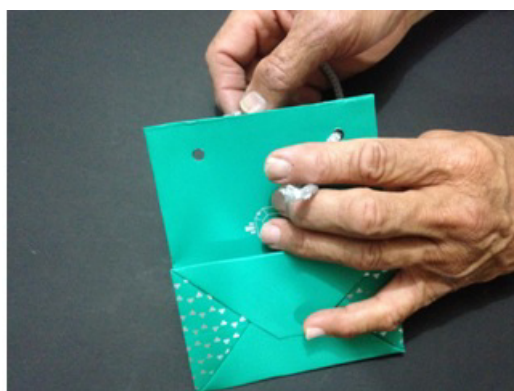


Figura 4.19: Pegado del cordón

### 4.2.0 PEGADO DEL CORDÓN

Cuando se tienen todos los cordones colocados en las bolsas, se toman una por una y se unen los extremos del cordón pegándolos usando una pistola para silicón y así formar el asa como se puede observar en la figura 4.20. Esta operación no todos los pedidos lo llevan.



Figura 4.20: Pegado del cordón

## 4.3 DATOS

En esta sección se proporcionan datos tales como los tamaños de los pliegos, los tipos de bolsas y sus características, los tiempos de las operaciones según el pedido. Se sabe que cada pedido es diferente tanto en diseño, color, tamaño de bolsa, etc.

### 4.3.0 TAMAÑOS DEL PLIEGO

La empresa trabaja con diferentes tamaños de pliegos, teniendo en cuenta que un tamaño específico de pliego forma una bolsa. La tabla 4.1 muestra las medidas de los pliegos, el nombre de la bolsa que se genera a partir del pliego y el tamaño de la bolsa para cada uno.

Medida del pliego	Nombre de la bolsa	Medida de la bolsa
13cm x 25cm	Bolsa mini	7.5cm x 9cm
23cm x 29 cm	Bolsa sin cordón	8.5cm x 19cm
19cm x 35cm	Bolsa #1	10cm x 14cm
23cm x 41 cm	Bolsa #1 especial	12.5cm x 15cm
22cm x 47.5cm	Bolsa #2	17cm x 17cm
22cm x 50cm	Bolsa #3	17cm x 18cm
31cm x 47.5cm	Bolsa #4	15cm x 24cm
31cm x 47.5cm	Bolsa #4 perforada	15cm x 24cm
33cm x 66cm	Bolsa jumbo	21cm x 24cm

Tabla 4.1: Datos correspondientes a los tamaños de las bolsas

A continuación, se presentan dos tablas con información importante. La tabla 4.2 muestra las 17 máquinas y todas las operaciones que se generan en ellas y la tabla 4.3 muestra todas las bolsas que produce la empresa y por cuáles máquinas pasa para su elaboración.

---

Máquina $i$	Operación
1	Corte del cordón
2	Manufactura del asa
3	Impresión del logotipo y secado
4	Primer marca simple
5	Primer marca doble
6	Segunda marca doble
7	Elaboración de la ceja
8	Cierre del pliego
9	Pegado
10	Fuelle
11	Doble en la parte superior
12	El asa en la bolsa
13	Perforación en la bolsa
14	Elaboración de la base
15	Pegado de la base
16	Cordón en la bolsa
17	Pegado del cordón

---

Tabla 4.2: Máquinas con sus operaciones

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Bolsa mini	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Bolsa sin cordón			✓	✓			✓	✓	✓	✓				✓	✓		
Bolsa 1	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Bolsa 1 especial	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Bolsa 2	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Bolsa 3	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Bolsa 4	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Bolsa 4 perforada	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Bolsa jumbo	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		

Tabla 4.3: Procesos en los tamaños de las bolsas

Las bolsas mini, 1, 2, 3, 4 y jumbo para que se lleven a cabo se ocupan las siguientes operaciones: el corte del cordón, la manufactura del asa, la impresión del logotipo y secado, la primer marca doble, la segunda marca doble, el cierre del pliego, el pegado, el fuelle, la doblez en la parte superior, el asa en la bolsa, la elaboración de la base y el pegado de la bolsa. La bolsa sin cordón lleva la mayoría de los pasos de las bolsas anteriores solo que se agrega la primera marca simple y se quita todos aquellos que involucran el cordón y el asa (corte del cordón, manufactura del asa, doblez en la parte superior y el asa en la bolsa). La bolsa 1 especial y la bolsa 4 perforada fue un nuevo diseño de bolsa en la cual se quitaban pasos tales como la manufactura del asa y el asa en la bolsa para agregar la perforación en la bolsa, el cordón en la bolsa y pegado del cordón. Es importante mencionar que la bolsa 1 especial es la única que ocupa de la operación segunda marca doble.



## 4.4 PROBLEMA DE SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS DE TIPO TALLER

El problema que se presenta en la empresa *Diseños* tiene características idénticas a las de un problema de secuenciación de trabajos tipo taller (*JSSP*), en el cual consideramos  $N$  trabajos, en este caso serán pedidos de bolsas,  $j \in N$  y  $M$  máquinas,  $i \in M$ , dependiendo el tipo de bolsa los pedidos pasarán por algún orden dado en las 17 máquinas posibles,  $O_{ij}$  denota la operación de la tarea  $j$  en la máquina  $i$  y  $p_{ij}$  su tiempo de proceso. El objetivo es minimizar el *Makespan*.

Para presentar la programación disyuntiva consideraremos la siguiente instancia: se tienen 3 pedidos de clientes, por lo tanto  $N = 3$ , con  $j = 1, 2, 3$ . Cada pedido es diferente, en el pedido 1 el cliente pide 300 bolsas 1 especial, en el pedido 2 el cliente pide 1000 bolsas sin cordón y en el pedido 3 el cliente pide 500 bolsas 1.

Se tomaron datos acerca de los tiempos individuales en las operaciones que ocupan los pedidos, esto se encuentra representado en las tablas 4.4, 4.5 y 4.6.

Operación	Tiempo
Corte del cordón	94 seg
Impresión del logotipo y secado	8 seg
Primer marca doble	5 seg
Segunda marca doble	5 seg
Elaboración de la ceja	3 seg
Cierre del pliego	4 seg
Pegado	5 seg
Fuelle	5 seg
Doble en la parte superior	6 seg
Perforación en la bolsa	5 seg
Elaboración de la base	8 seg
Pegado de la base	5 seg
Cordón en la bolsa	3 seg
Pegado del cordón	4 seg

Tabla 4.4: Tiempos individuales correspondientes al pedido 1

Operación	Tiempo
Impresión del logotipo y secado	8 seg
Primer marca simple	5 seg
Elaboración de la ceja	3 seg
Cierre del pliego	4 seg
Pegado	5 seg
Fuelle	5 seg
Elaboración de la base	8 seg
Pegado de la base	5 seg

Tabla 4.5: Tiempos individuales correspondientes al pedido 2

---

Operación	Tiempo
Corte del cordón	94 seg
Manufactura del asa	25 seg
Impresión del logotipo y secado	8 seg
Primer marca doble	5 seg
Elaboración de la ceja	3 seg
Cierre del pliego	4 seg
Pegado	5 seg
Fuelle	5 seg
Doble en la parte superior	6 seg
El asa en la bolsa	9 seg
Elaboración de la base	8 seg
Pegado de la base	5 seg

---

Tabla 4.6: Tiempos individuales correspondientes al pedido 3

La tabla 4.7 muestra los tres trabajos con sus respectivas secuencias en las máquinas y tiempos de proceso.

Tarea	Secuencia en la máquina	Tiempo de proceso
1	1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16 17	$p_{11} = 360, p_{31} = 2400, p_{51} = 1500,$ $p_{61} = 1500, p_{71} = 900, p_{81} = 1200,$ $p_{91} = 1500, p_{101} = 1500, p_{111} = 1800,$ $p_{131} = 1500, p_{141} = 2400, p_{151} = 1500,$ $p_{161} = 900, p_{171} = 1200$
2	3, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15	$p_{32} = 8000, p_{42} = 5000, p_{72} = 3000,$ $p_{82} = 4000, p_{92} = 5000, p_{102} = 5000,$ $p_{142} = 8000, p_{152} = 5000$
3	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15	$p_{13} = 1175, p_{23} = 6250, p_{33} = 4000,$ $p_{53} = 2500, p_{73} = 1500, p_{83} = 2000,$ $p_{93} = 2500, p_{103} = 2500, p_{113} = 3000,$ $p_{123} = 4500, p_{143} = 4000, p_{153} = 2500$

Tabla 4.7: Secuencia en la máquina y Tiempo de proceso

Como se explicó en el capítulo 3 la programación disyuntiva va de la mano con el grafo disyuntivo. La figura 4.21 muestra el grafo correspondiente a la instancia dada de 3 pedidos.

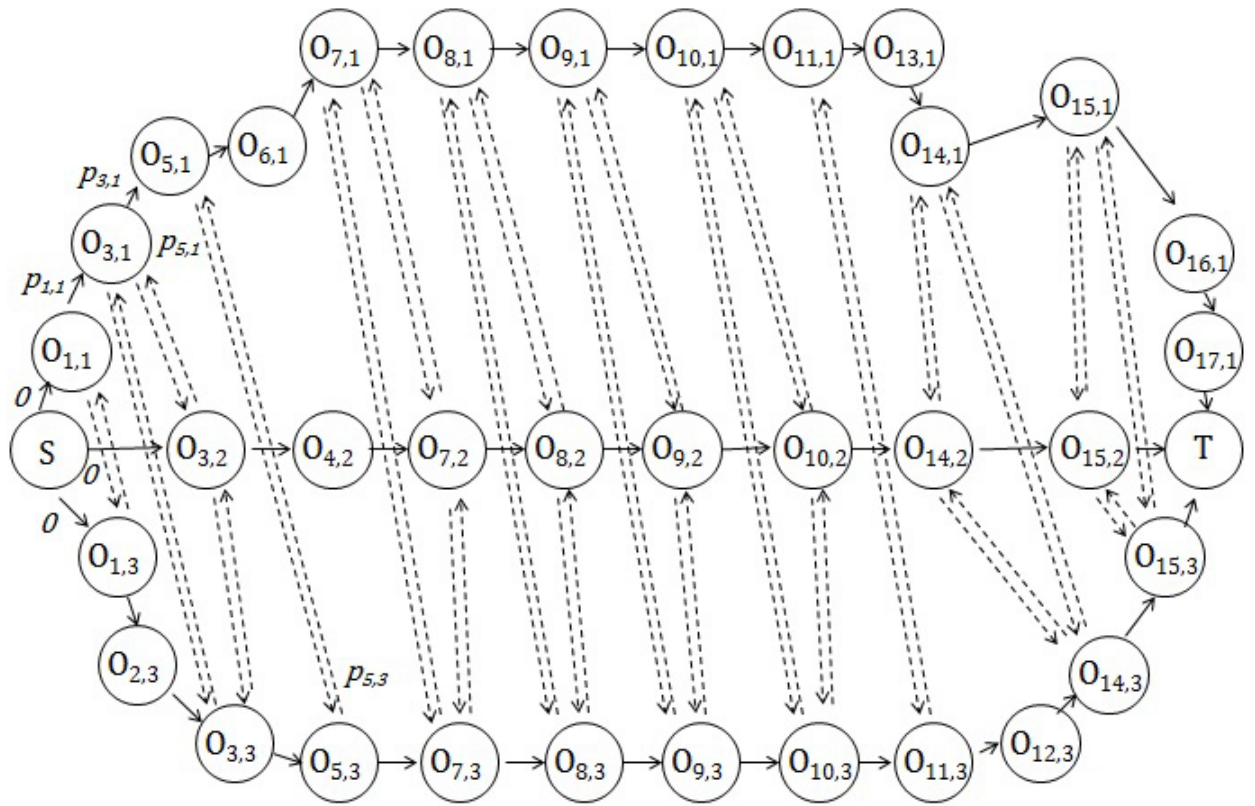


Figura 4.21: Grafo disyuntivo correspondiente al caso de estudio

El modelo matemático correspondiente a la instancia de la tabla 4.7 es el siguiente.

Sea  $y_{ij}$  el tiempo de inicio del trabajo  $j$  en la máquina  $i$ .

Sea

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } j \text{ va antes que } k \text{ en la máquina } i \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\text{Min } C_{max}$$

s.a

$$y_{31} - y_{11} \geq 360$$

$$y_{51} - y_{31} \geq 2400$$

$$y_{61} - y_{51} \geq 1500$$

$$y_{71} - y_{61} \geq 1500$$

$$y_{81} - y_{71} \geq 900$$

$$y_{91} - y_{81} \geq 1200$$

$$y_{101} - y_{91} \geq 1500$$

$$y_{111} - y_{101} \geq 1500$$

$$y_{131} - y_{111} \geq 1800$$

$$y_{141} - y_{131} \geq 1500$$

$$y_{151} - y_{141} \geq 2400$$

$$y_{161} - y_{151} \geq 1500$$

$$y_{171} - y_{161} \geq 900$$

$$y_{42} - y_{32} \geq 8000$$

$$y_{72} - y_{42} \geq 5000$$

$$y_{82} - y_{72} \geq 3000$$

$$y_{92} - y_{82} \geq 4000$$

$$y_{102} - y_{92} \geq 5000$$

$$y_{142} - y_{102} \geq 5000$$

$$y_{152} - y_{142} \geq 8000$$

$$y_{23} - y_{13} \geq 1175$$

$$y_{33} - y_{23} \geq 6250$$

$$y_{53} - y_{33} \geq 4000$$

$$y_{73} - y_{53} \geq 2500$$

$$y_{83} - y_{73} \geq 1500$$

$$y_{93} - y_{83} \geq 2000$$

$$y_{103} - y_{93} \geq 2500$$

$$y_{113} - y_{103} \geq 2500$$

$$y_{123} - y_{113} \geq 3000$$

$$y_{143} - y_{123} \geq 4500$$

$$y_{153} - y_{143} \geq 4000$$

$$C_{max} - y_{11} \geq 360$$

$$C_{max} - y_{31} \geq 2400$$

$$C_{max} - y_{51} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{61} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{71} \geq 900$$

$$C_{max} - y_{81} \geq 1200$$

$$C_{max} - y_{91} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{101} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{111} \geq 1800$$

$$C_{max} - y_{131} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{141} \geq 2400$$

$$C_{max} - y_{151} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{161} \geq 900$$

$$C_{max} - y_{171} \geq 1200$$

$$C_{max} - y_{32} \geq 8000$$

$$C_{max} - y_{42} \geq 5000$$

$$C_{max} - y_{72} \geq 3000$$

$$C_{max} - y_{82} \geq 4000$$

$$C_{max} - y_{92} \geq 5000$$

$$C_{max} - y_{102} \geq 5000$$

$$C_{max} - y_{142} \geq 8000$$

$$C_{max} - y_{152} \geq 5000$$

$$C_{max} - y_{13} \geq 1175$$

$$C_{max} - y_{23} \geq 6250$$

$$C_{max} - y_{33} \geq 4000$$

$$C_{max} - y_{53} \geq 2500$$

$$C_{max} - y_{73} \geq 1500$$

$$C_{max} - y_{83} \geq 2000$$

$$C_{max} - y_{93} \geq 2500$$

$$C_{max} - y_{103} \geq 2500$$

$$C_{max} - y_{113} \geq 3000$$

$$C_{max} - y_{123} \geq 4500$$

$$C_{max} - y_{143} \geq 4000$$

$$C_{max} - y_{153} \geq 2500$$



$$\begin{aligned}
y_{13} - y_{11} &\geq 360 - M(1 - x_{113}), & y_{11} - y_{13} &\geq 1175 - M(1 - x_{131}), & x_{113} + x_{131} &= 1 \\
y_{32} - y_{31} &\geq 2400 - M(1 - x_{312}), & y_{31} - y_{32} &\geq 8000 - M(1 - x_{321}), & x_{312} + x_{321} &= 1 \\
y_{33} - y_{31} &\geq 2400 - M(1 - x_{313}), & y_{31} - y_{33} &\geq 4000 - M(1 - x_{331}), & x_{313} + x_{331} &= 1 \\
y_{33} - y_{32} &\geq 8000 - M(1 - x_{323}), & y_{32} - y_{33} &\geq 4000 - M(1 - x_{332}), & x_{323} + x_{332} &= 1 \\
y_{53} - y_{51} &\geq 1500 - M(1 - x_{513}), & y_{51} - y_{53} &\geq 2500 - M(1 - x_{531}), & x_{513} + x_{531} &= 1 \\
y_{72} - y_{71} &\geq 900 - M(1 - x_{712}), & y_{71} - y_{72} &\geq 3000 - M(1 - x_{721}), & x_{712} + x_{721} &= 1 \\
y_{73} - y_{71} &\geq 900 - M(1 - x_{713}), & y_{71} - y_{73} &\geq 1500 - M(1 - x_{731}), & x_{713} + x_{731} &= 1 \\
y_{73} - y_{72} &\geq 3000 - M(1 - x_{723}), & y_{72} - y_{73} &\geq 1500 - M(1 - x_{732}), & x_{723} + x_{732} &= 1 \\
y_{82} - y_{81} &\geq 1200 - M(1 - x_{812}), & y_{81} - y_{82} &\geq 4000 - M(1 - x_{821}), & x_{812} + x_{821} &= 1 \\
y_{83} - y_{81} &\geq 1200 - M(1 - x_{813}), & y_{81} - y_{83} &\geq 2000 - M(1 - x_{831}), & x_{813} + x_{831} &= 1 \\
y_{83} - y_{82} &\geq 4000 - M(1 - x_{823}), & y_{82} - y_{83} &\geq 2000 - M(1 - x_{832}), & x_{432} + x_{423} &= 1 \\
y_{92} - y_{91} &\geq 1500 - M(1 - x_{912}), & y_{91} - y_{92} &\geq 5000 - M(1 - x_{921}), & x_{912} + x_{921} &= 1 \\
y_{93} - y_{91} &\geq 1500 - M(1 - x_{913}), & y_{91} - y_{93} &\geq 2500 - M(1 - x_{931}), & x_{913} + x_{931} &= 1 \\
y_{93} - y_{92} &\geq 5000 - M(1 - x_{923}), & y_{92} - y_{93} &\geq 2500 - M(1 - x_{932}), & x_{923} + x_{932} &= 1 \\
y_{102} - y_{101} &\geq 1500 - M(1 - x_{1012}), & y_{101} - y_{102} &\geq 5000 - M(1 - x_{1021}), & x_{1012} + x_{1021} &= 1 \\
y_{103} - y_{101} &\geq 1500 - M(1 - x_{1013}), & y_{101} - y_{103} &\geq 2500 - M(1 - x_{1031}), & x_{1013} + x_{1031} &= 1 \\
y_{103} - y_{102} &\geq 5000 - M(1 - x_{1023}), & y_{102} - y_{103} &\geq 2500 - M(1 - x_{1032}), & x_{1023} + x_{1032} &= 1 \\
y_{113} - y_{111} &\geq 1800 - M(1 - x_{1113}), & y_{111} - y_{113} &\geq 3000 - M(1 - x_{1131}), & x_{1113} + x_{1131} &= 1 \\
y_{142} - y_{141} &\geq 2400 - M(1 - x_{1412}), & y_{141} - y_{142} &\geq 8000 - M(1 - x_{1421}), & x_{1412} + x_{1421} &= 1 \\
y_{143} - y_{141} &\geq 2400 - M(1 - x_{1413}), & y_{141} - y_{143} &\geq 4000 - M(1 - x_{1431}), & x_{1413} + x_{1431} &= 1 \\
y_{152} - y_{151} &\geq 1500 - M(1 - x_{1512}), & y_{151} - y_{152} &\geq 5000 - M(1 - x_{1521}), & x_{1512} + x_{1521} &= 1 \\
y_{153} - y_{151} &\geq 1500 - M(1 - x_{1513}), & y_{151} - y_{153} &\geq 2500 - M(1 - x_{1531}), & x_{1513} + x_{1531} &= 1 \\
y_{153} - y_{152} &\geq 5000 - M(1 - x_{1523}), & y_{152} - y_{153} &\geq 2500 - M(1 - x_{1532}), & x_{1523} + x_{1532} &= 1
\end{aligned}$$

$$y_{11}, y_{31}, y_{21}, y_{22}, y_{32}, y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{33} \geq 0 \quad x_{ijk} = \{0, 1\}$$

Para presentar la programación disyuntiva, del grafo presentado en la figura 4.21 tomaremos las operaciones siguientes: el asa en la bolsa, perforación en la bolsa, elaboración en la bolsa, elaboración de la base, pegado de la base, cordón en la bolsa y pegado de cordón.

En el grafo disyuntivo de la figura 4.22 podemos ver que para el pedido 1 se toman las máquinas 13, 14, 15, 16, y 17, para el pedido 2 las máquinas 14 y 15 y para el pedido 3 las máquinas 12, 14 y 15.

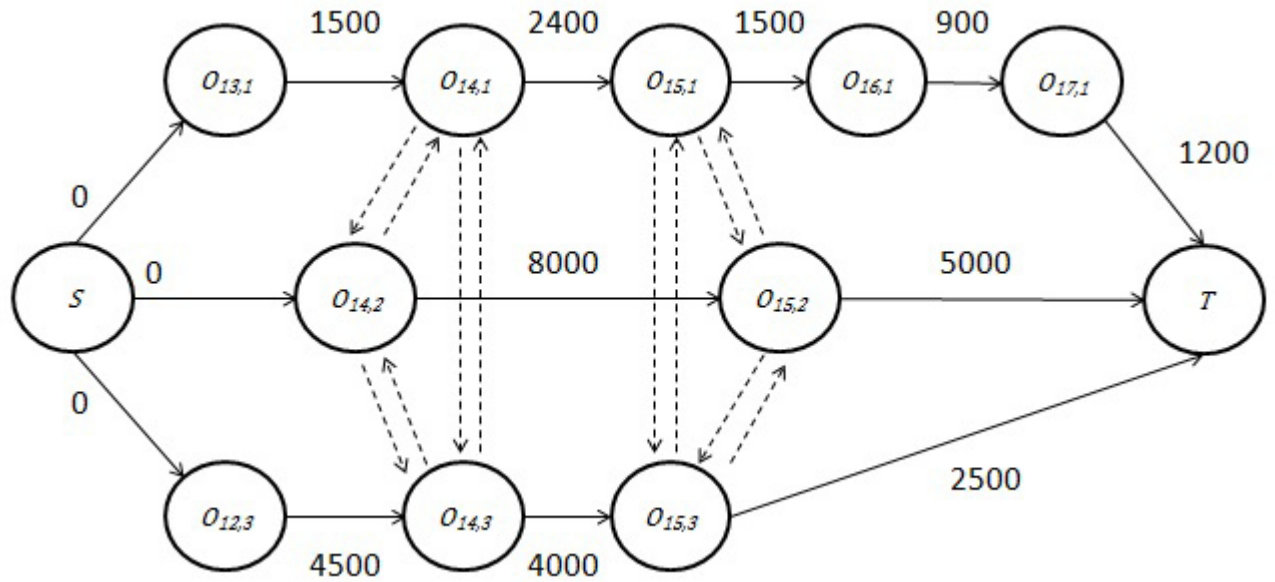
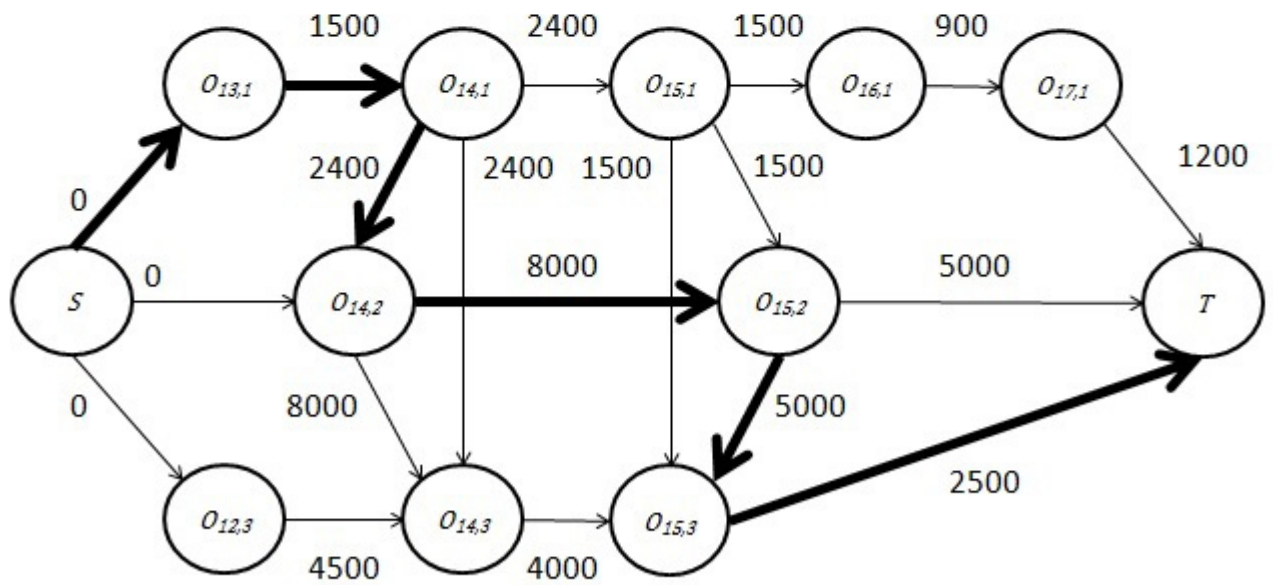
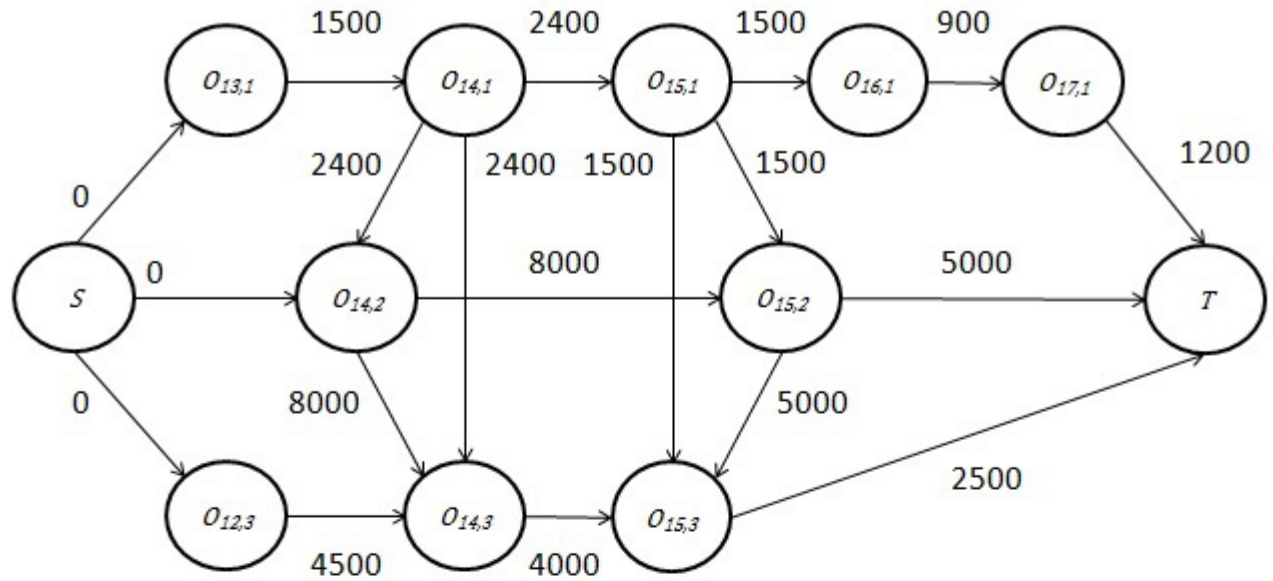


Figura 4.22: Grafo reducido

El grafo disyuntivo de la figura 4.22 cuenta con arcos disyuntivos entre las operaciones  $O_{14,1}$ ,  $O_{14,2}$ ,  $O_{14,3}$  y  $O_{15,1}$ ,  $O_{15,2}$ ,  $O_{15,3}$ , dichos arcos unen operaciones en una misma máquina, de ellos se selecciona un arco (de cada par) para después encontrar la ruta más larga del nodo  $S$  a  $T$  y de todas dichas rutas seleccionamos la menor. De la figura 4.23 a la figura 4.57 muestran los 35 grafos con sus selecciones de arcos disyuntivos junto con sus respectivas rutas más largas.

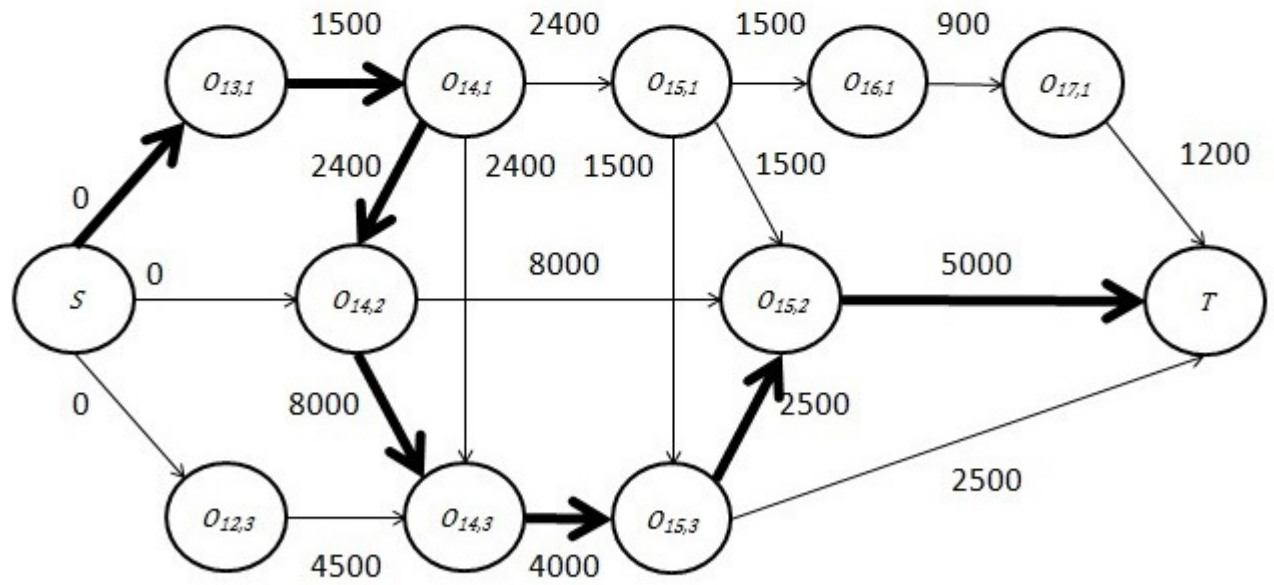
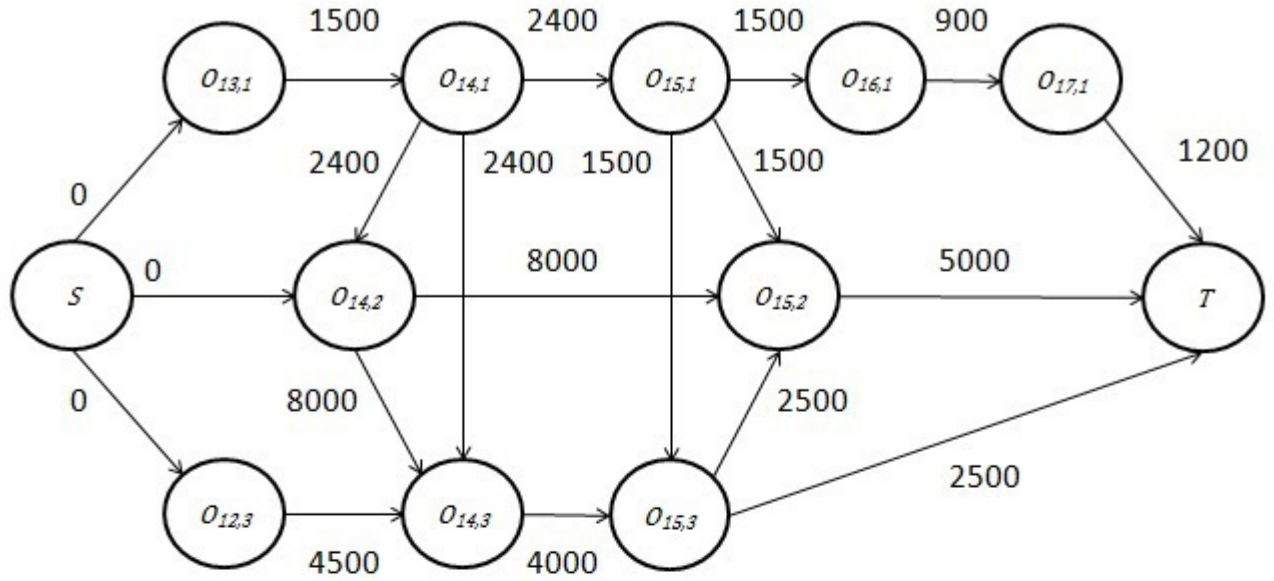


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 19,400$$

Figura 4.23: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

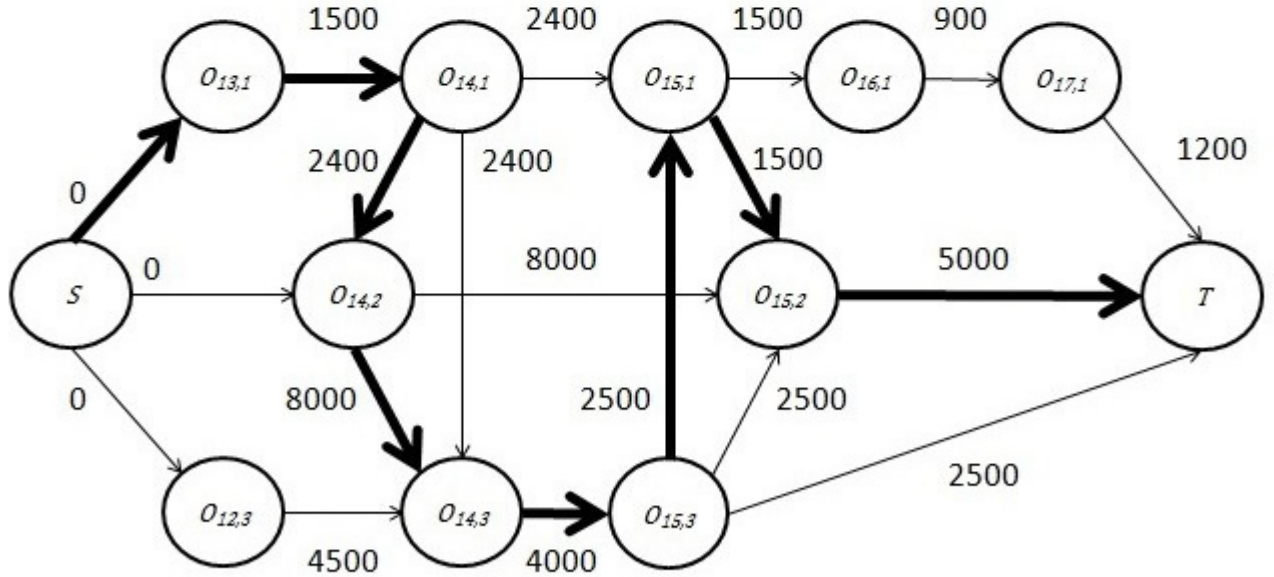
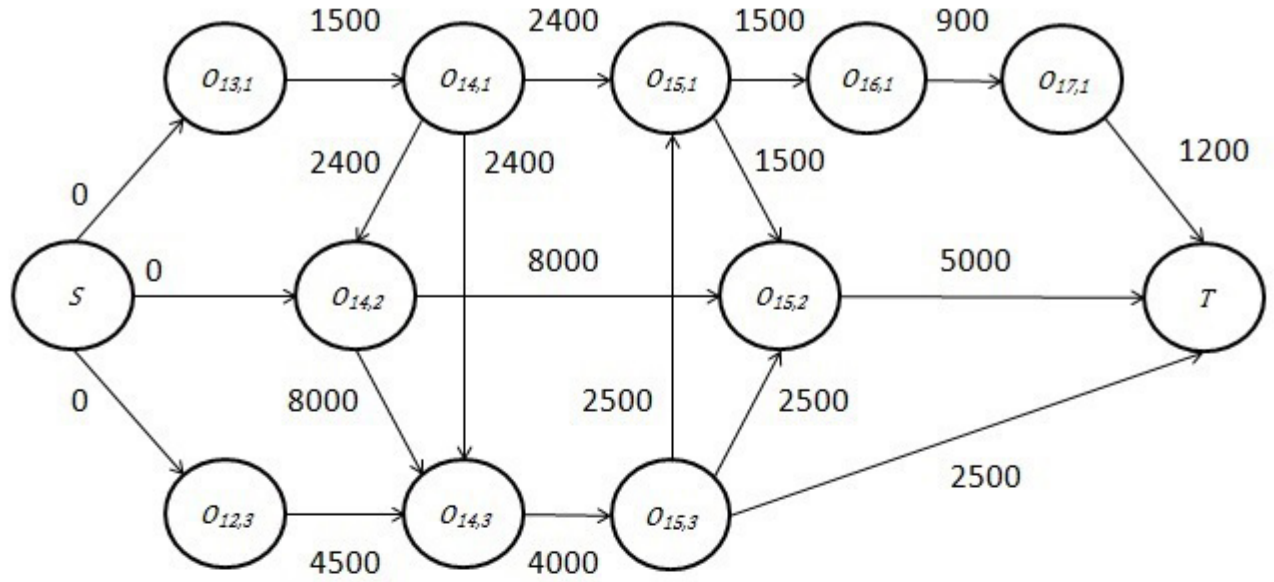


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 23,400$$

Figura 4.24: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



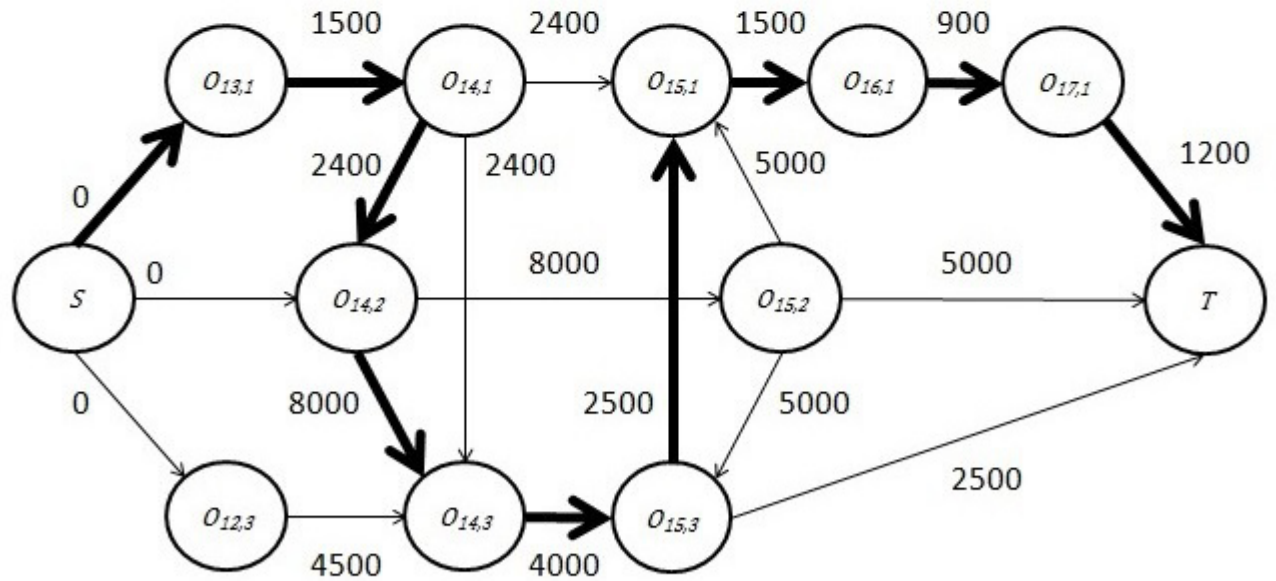
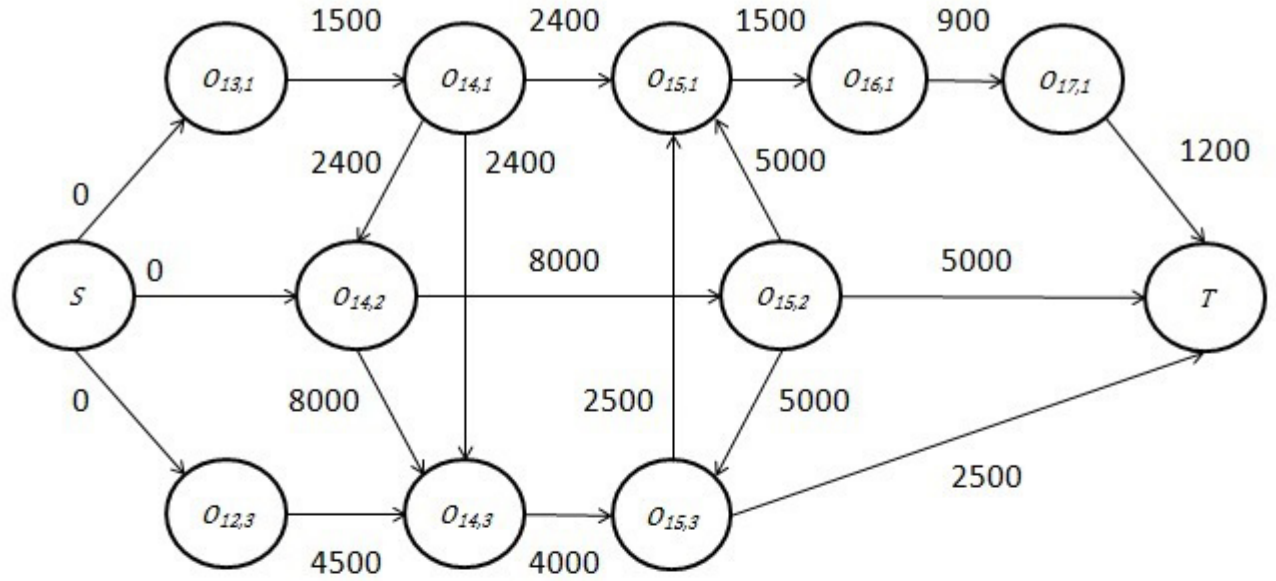
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 24,900$$

Figura 4.25: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



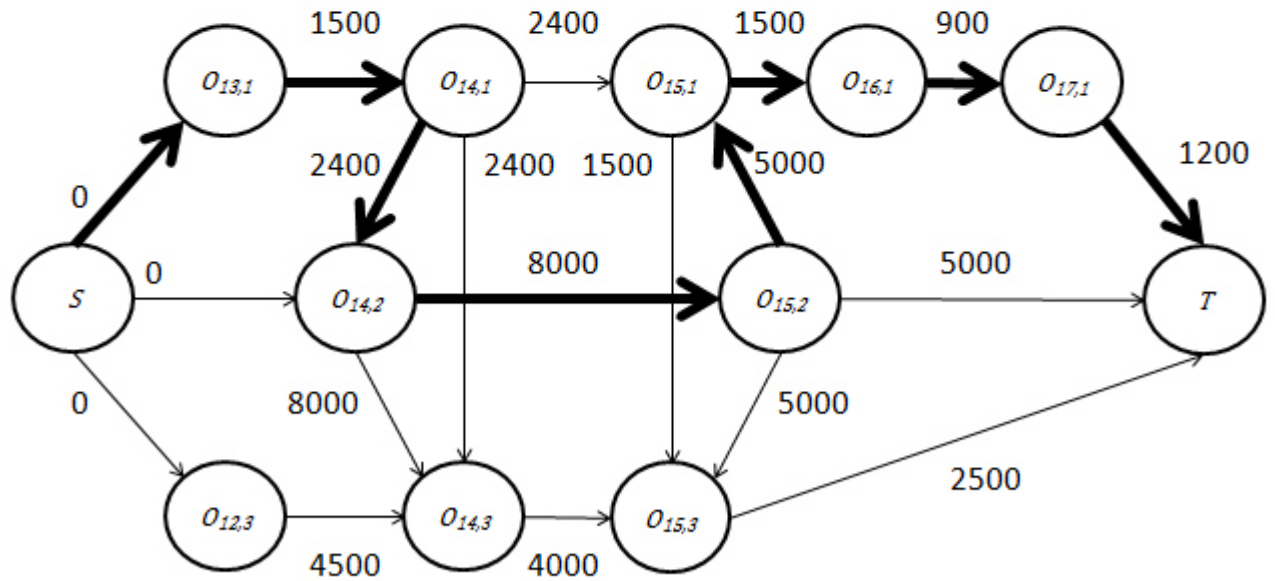
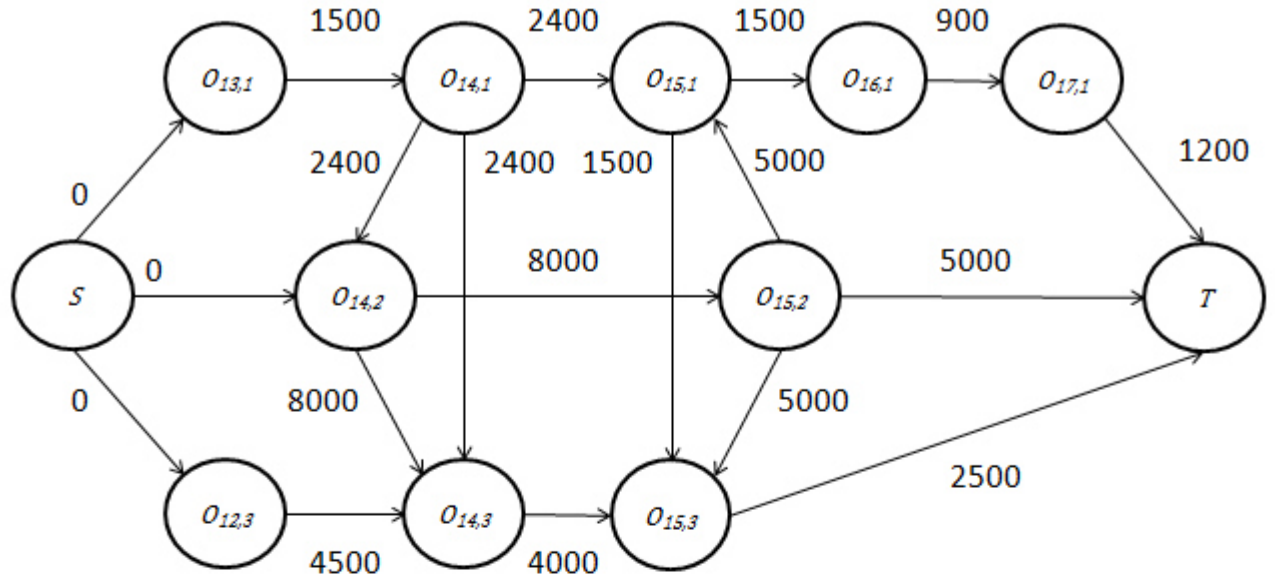


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 22,000$$

Figura 4.26: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

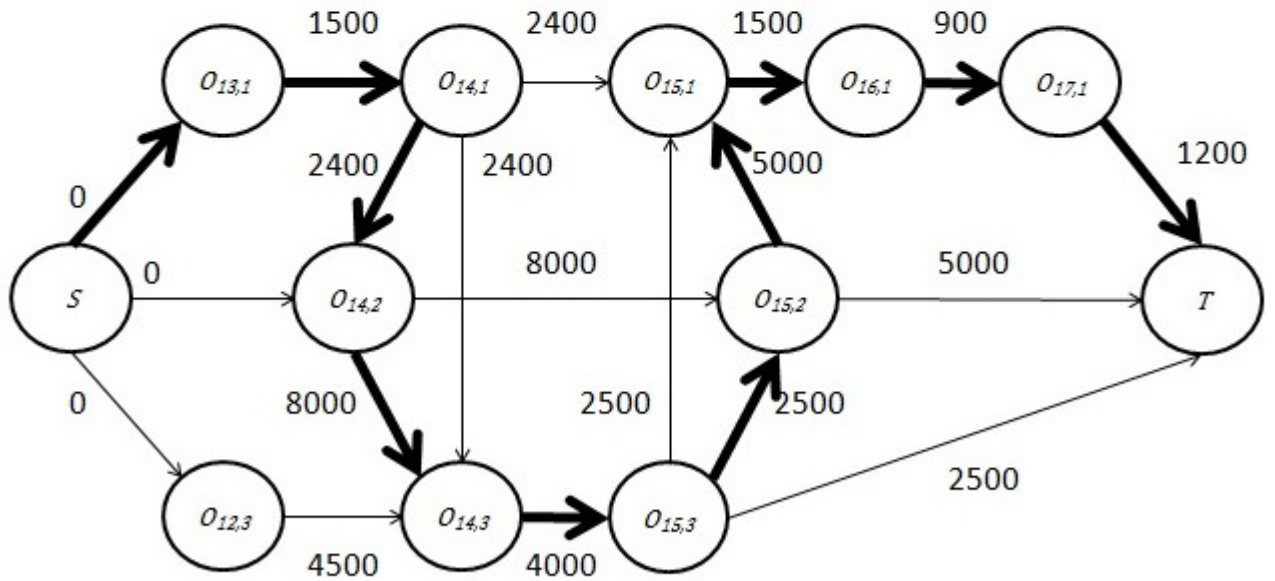
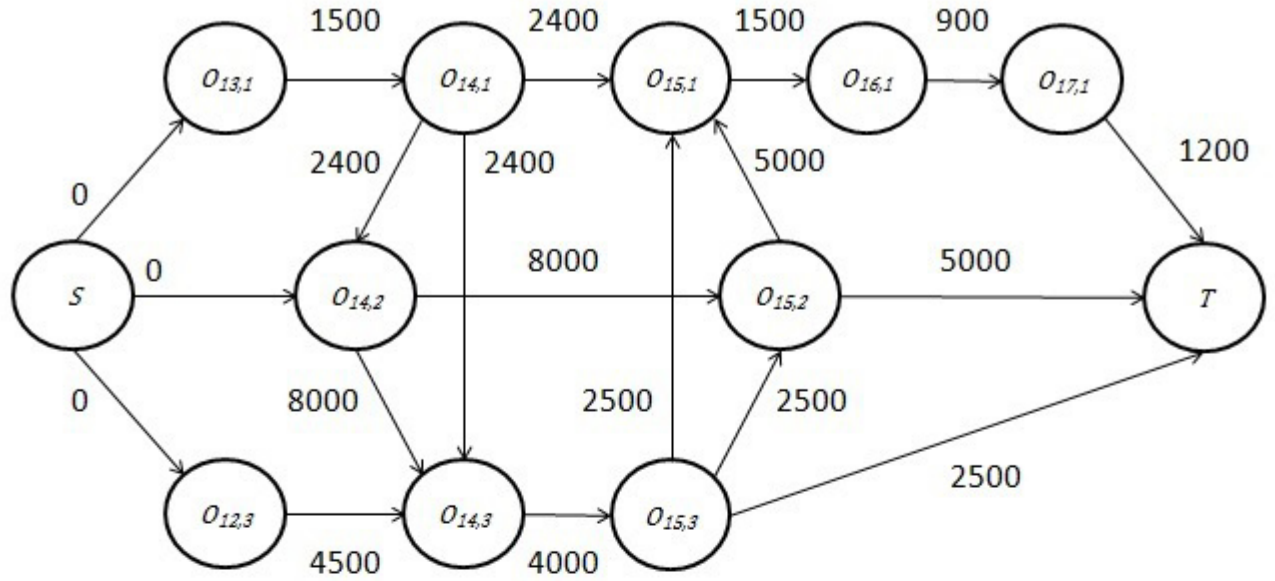


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 20,500$$

Figura 4.27: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga



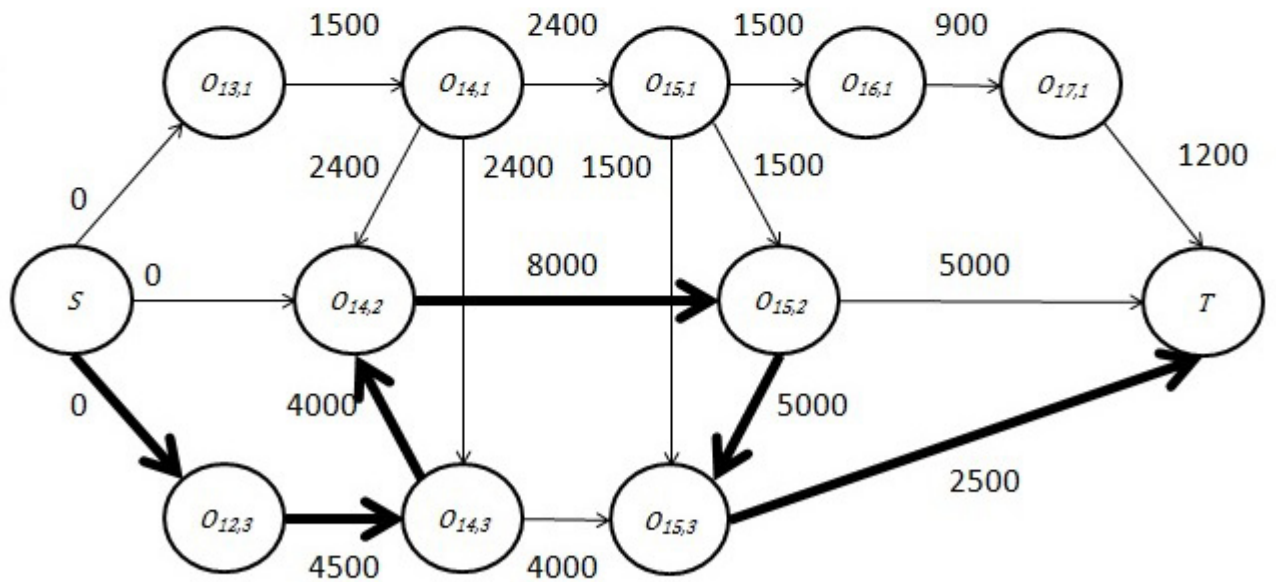
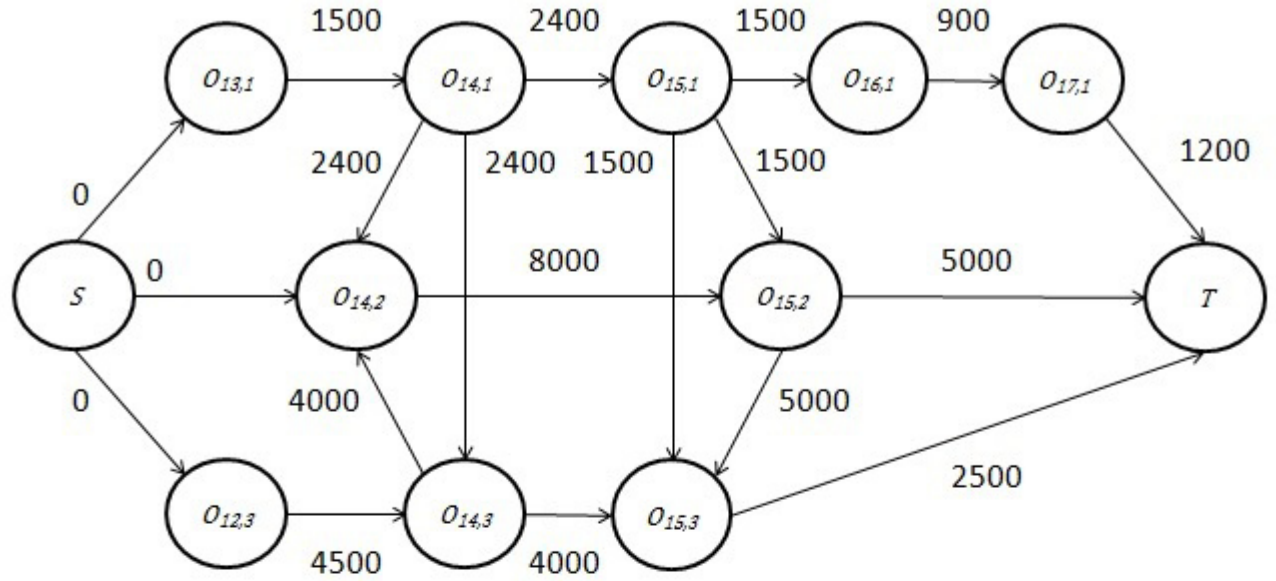
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{13,1} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 27,000$$

Figura 4.28: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga



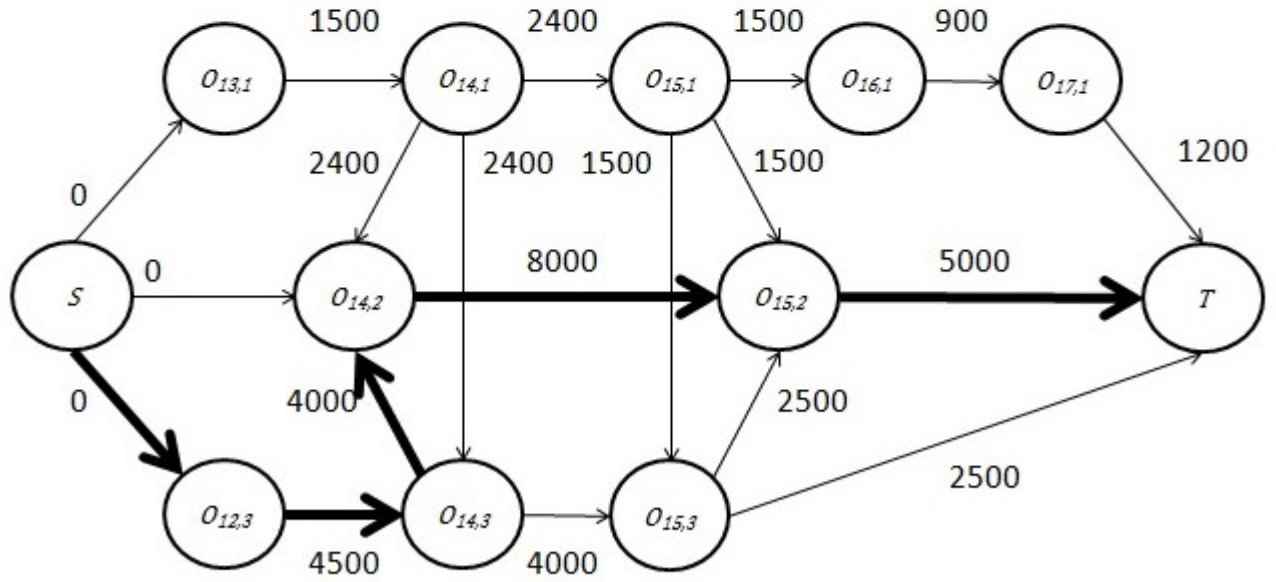
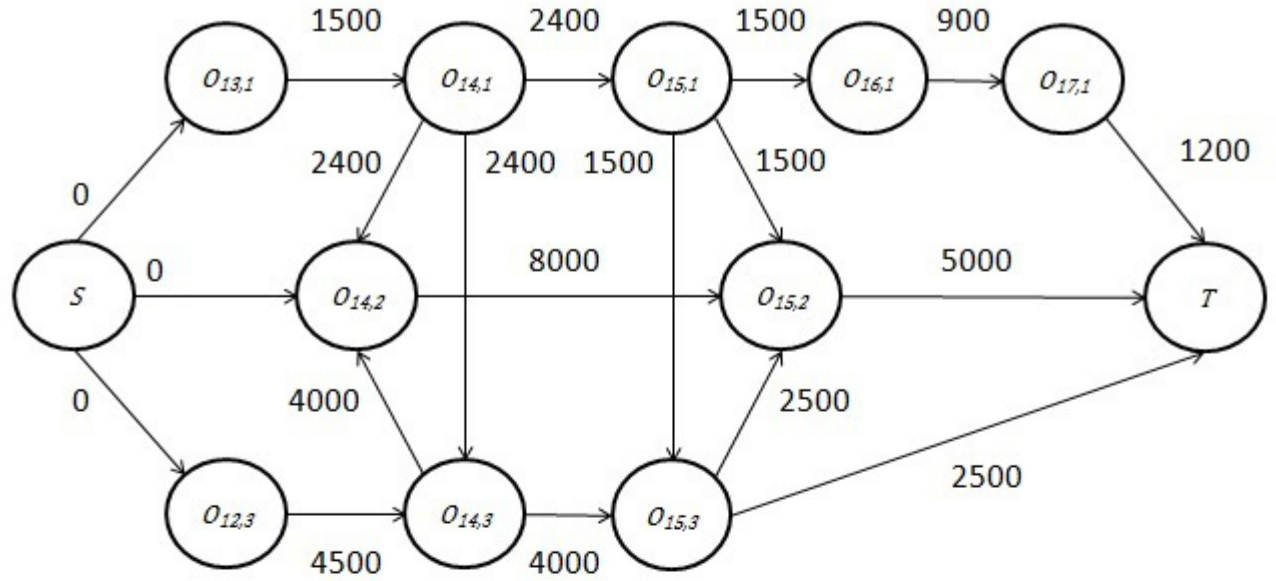


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 24,000$$

Figura 4.29: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

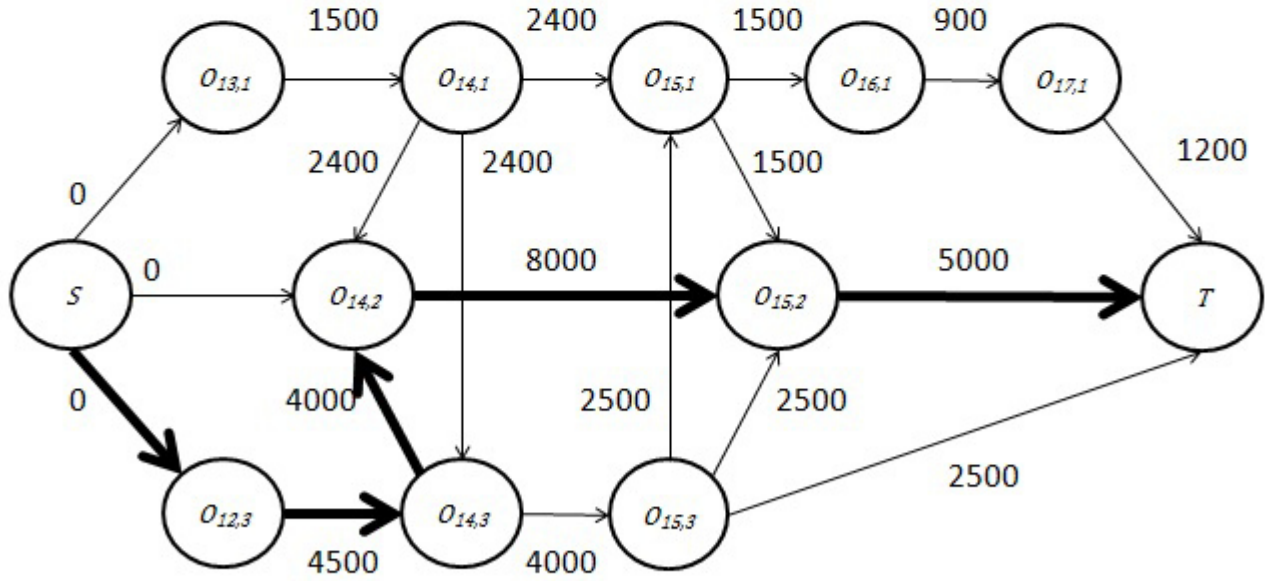
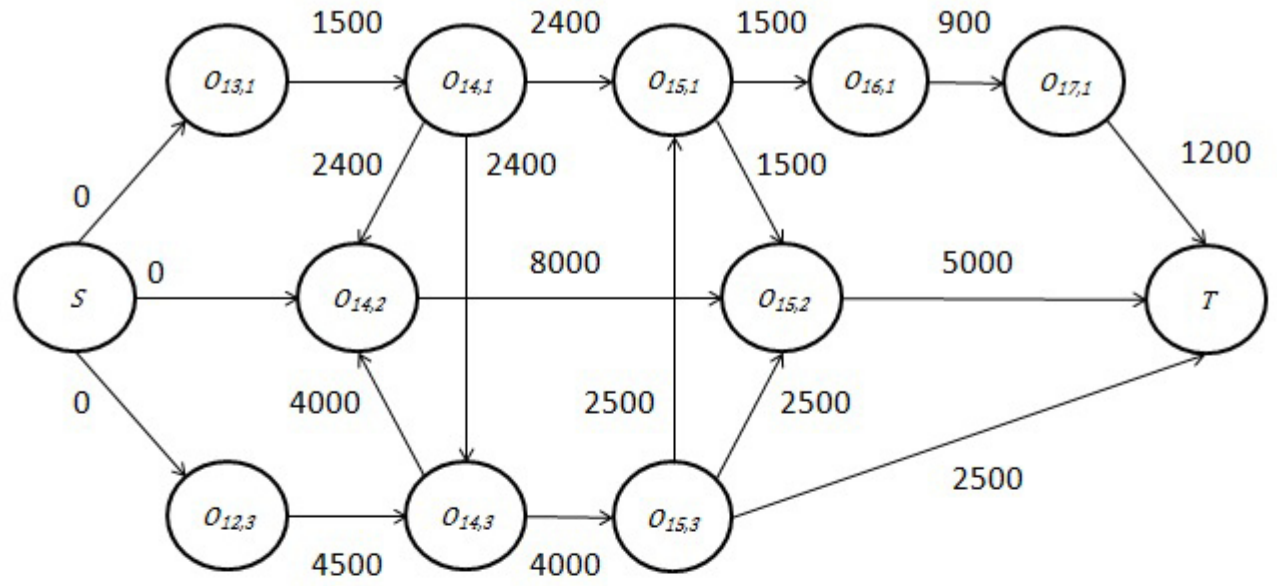


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 21,500$$

Figura 4.30: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

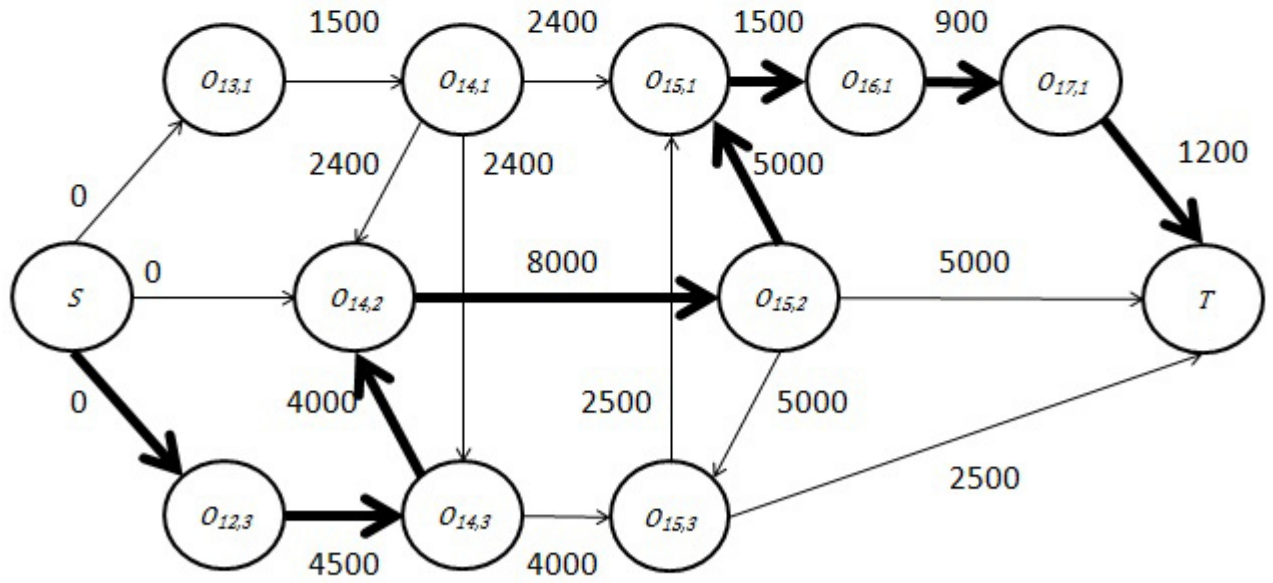
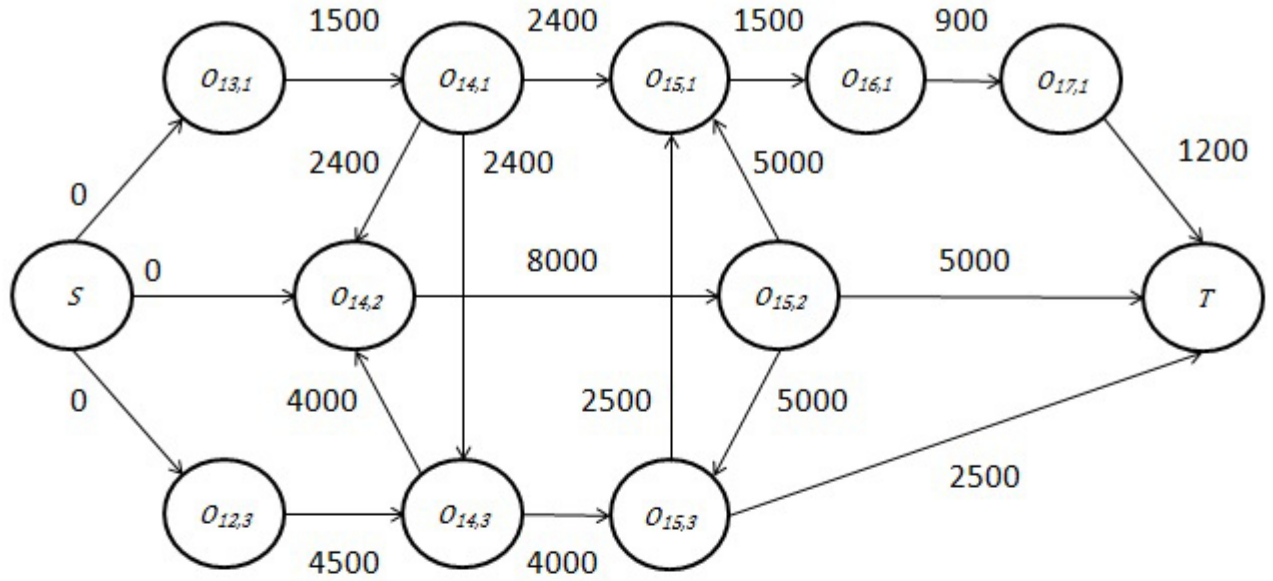


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 21,500$$

Figura 4.31: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



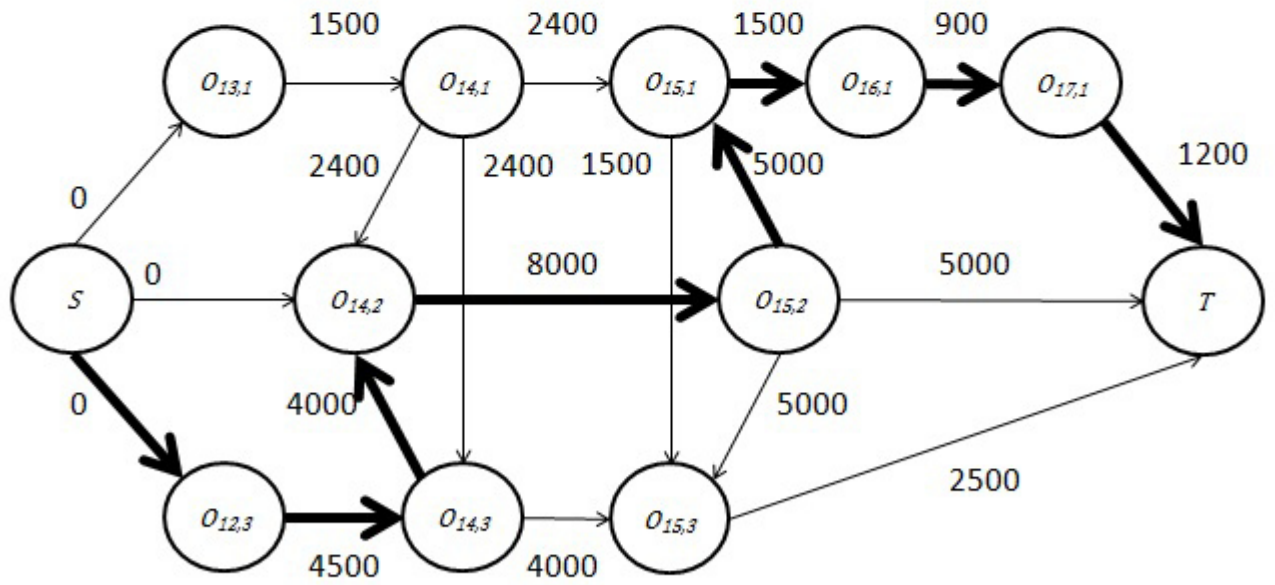
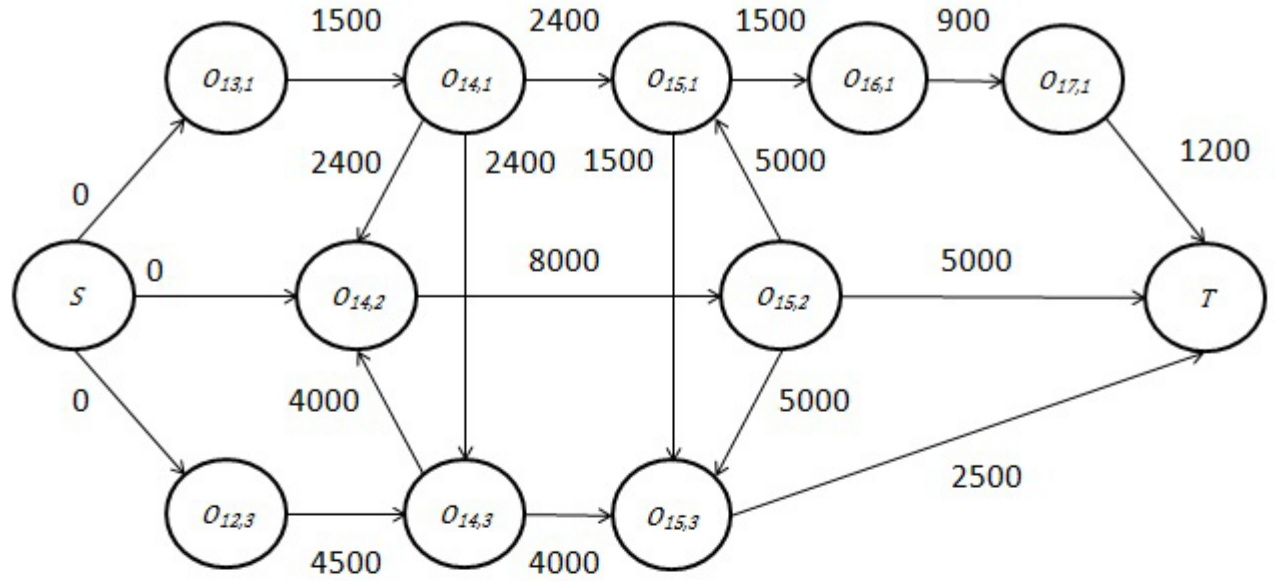
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.32: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga



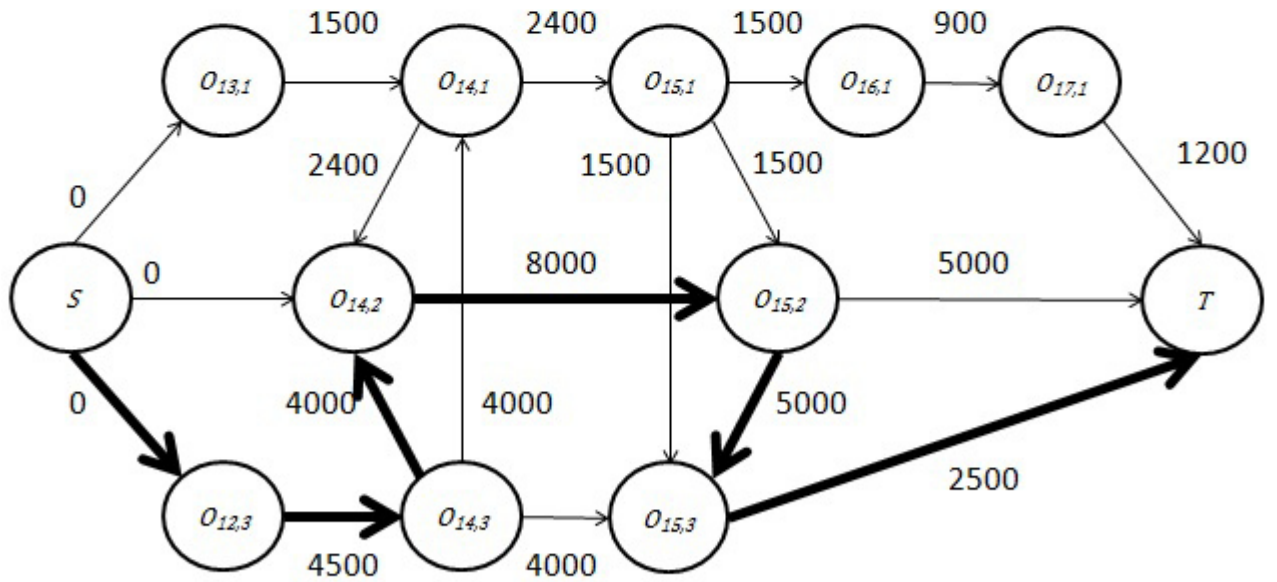
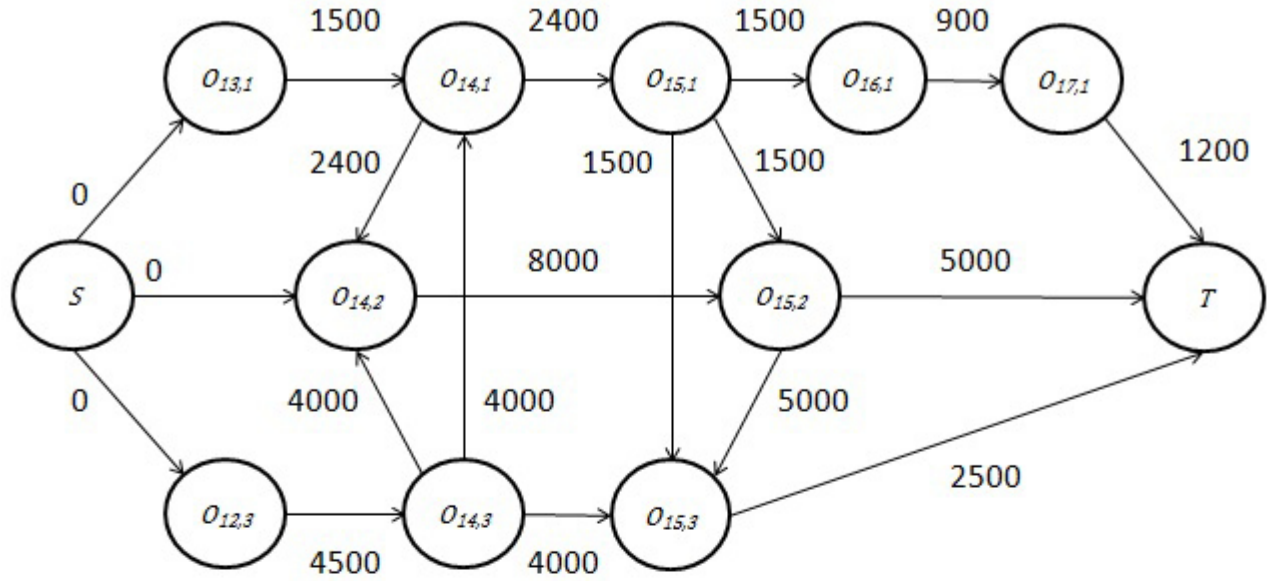


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.33: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

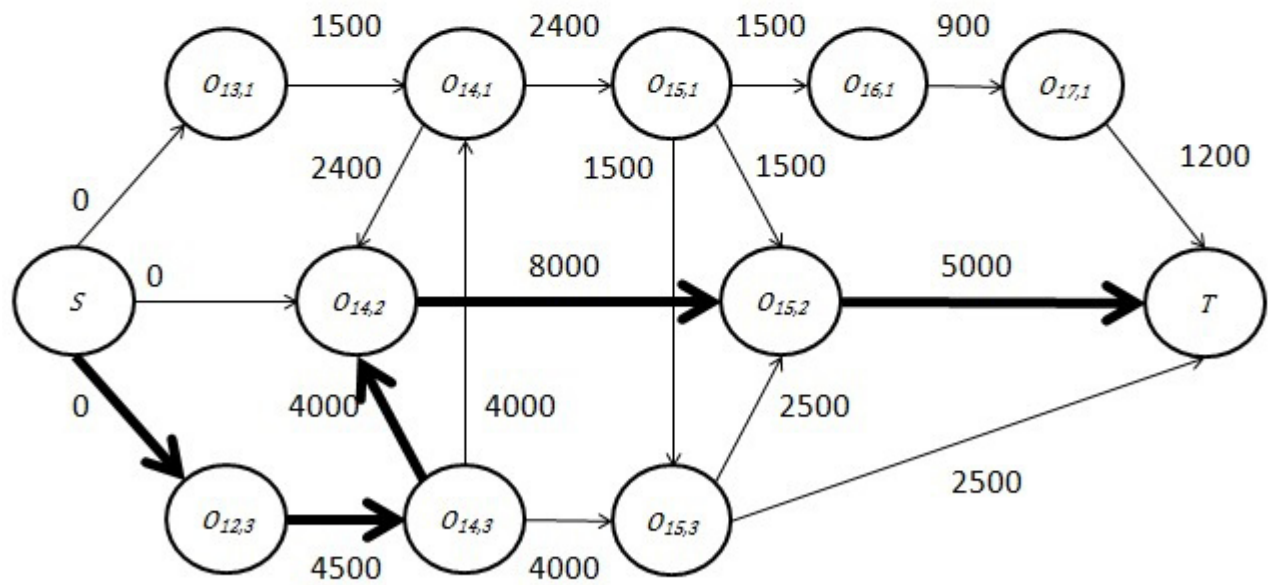
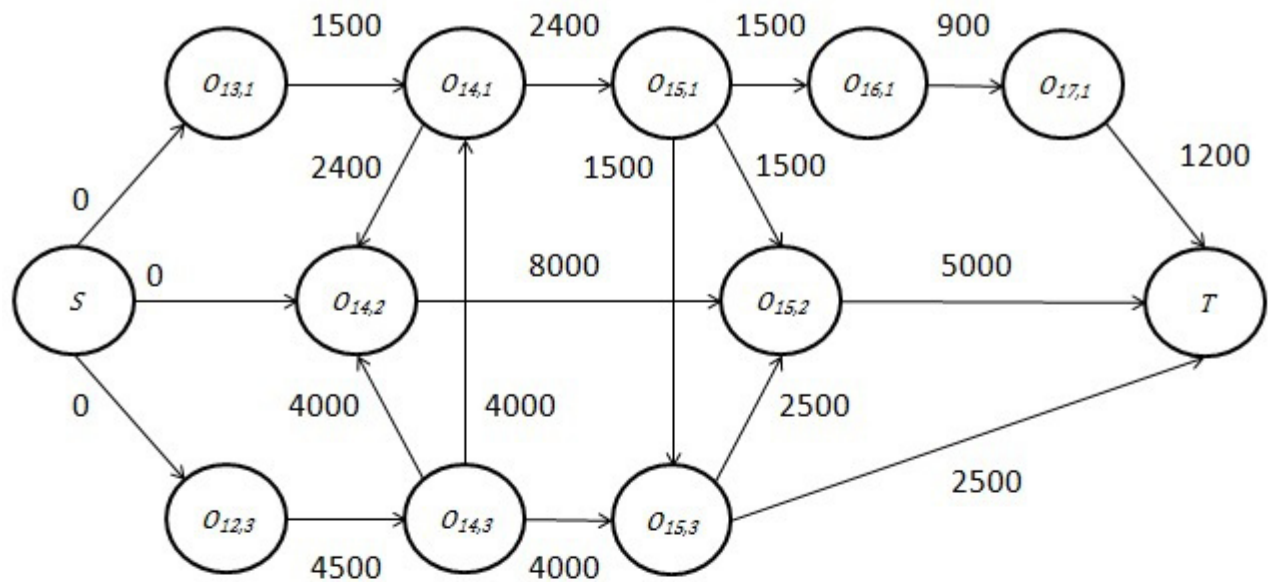


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 24,000$$

Figura 4.34: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

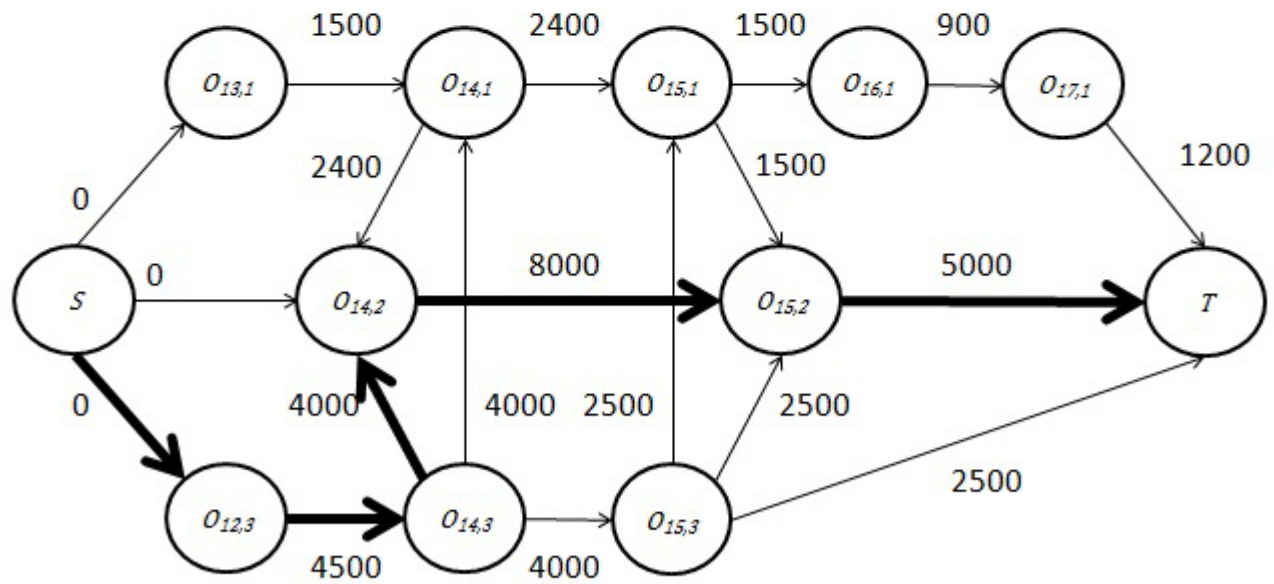
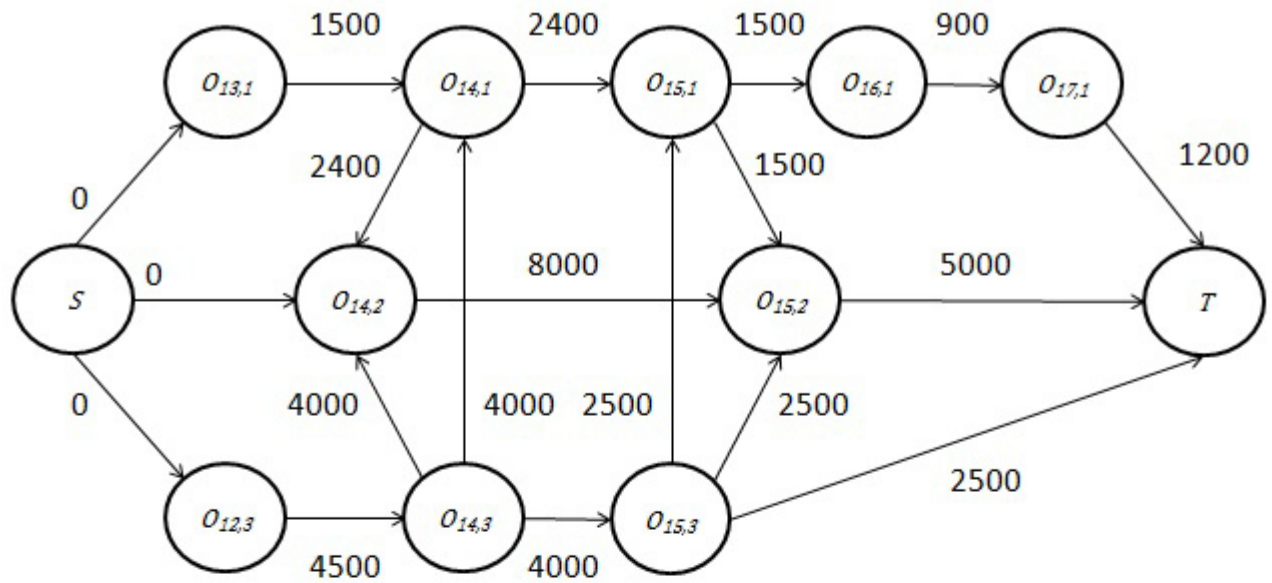


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 21,500$$

Figura 4.35: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



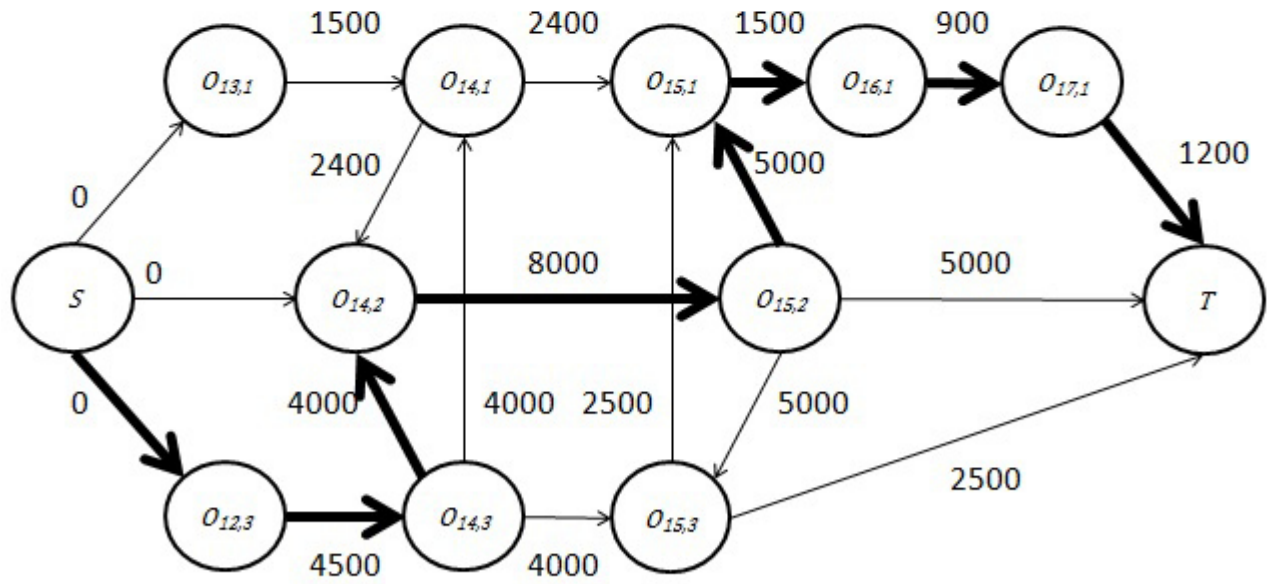
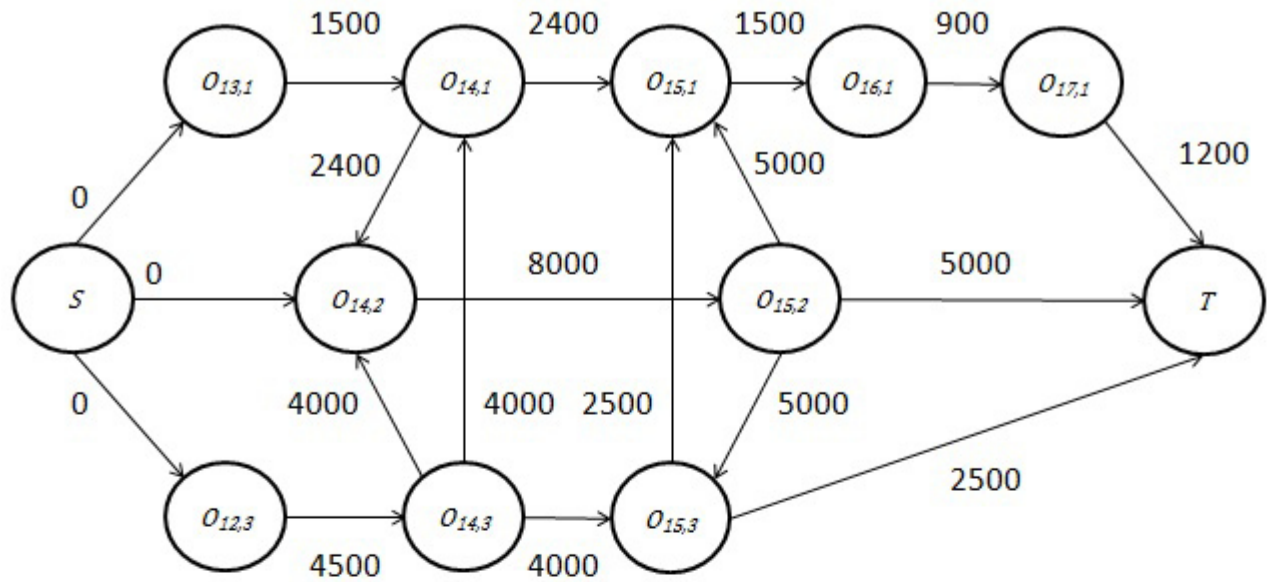
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 21,500$$

Figura 4.36: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



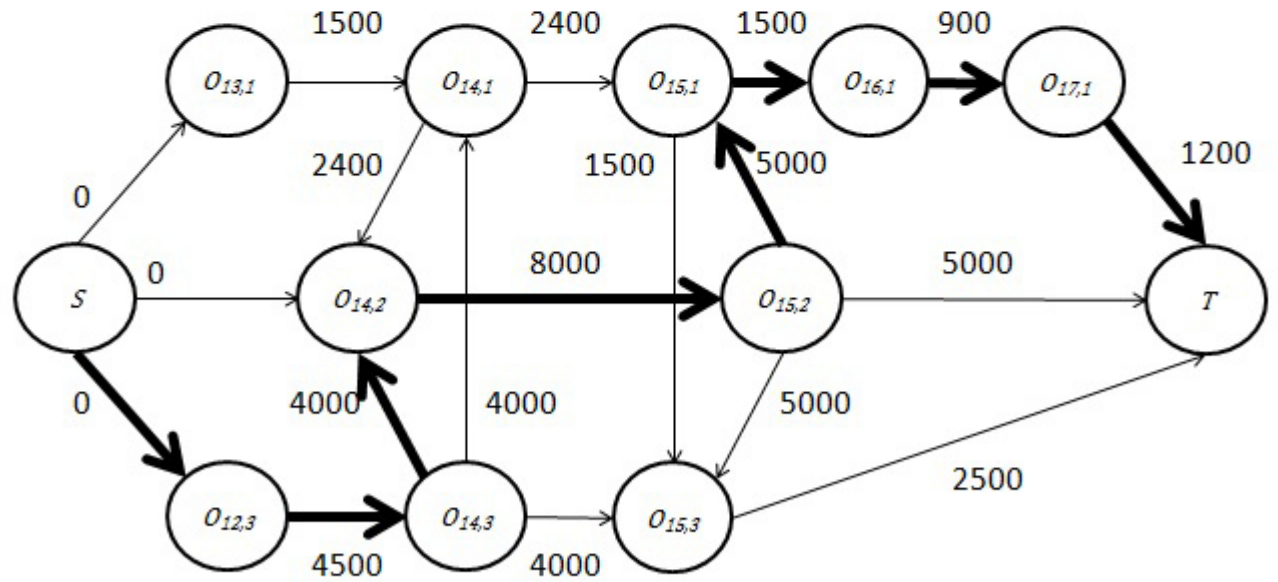
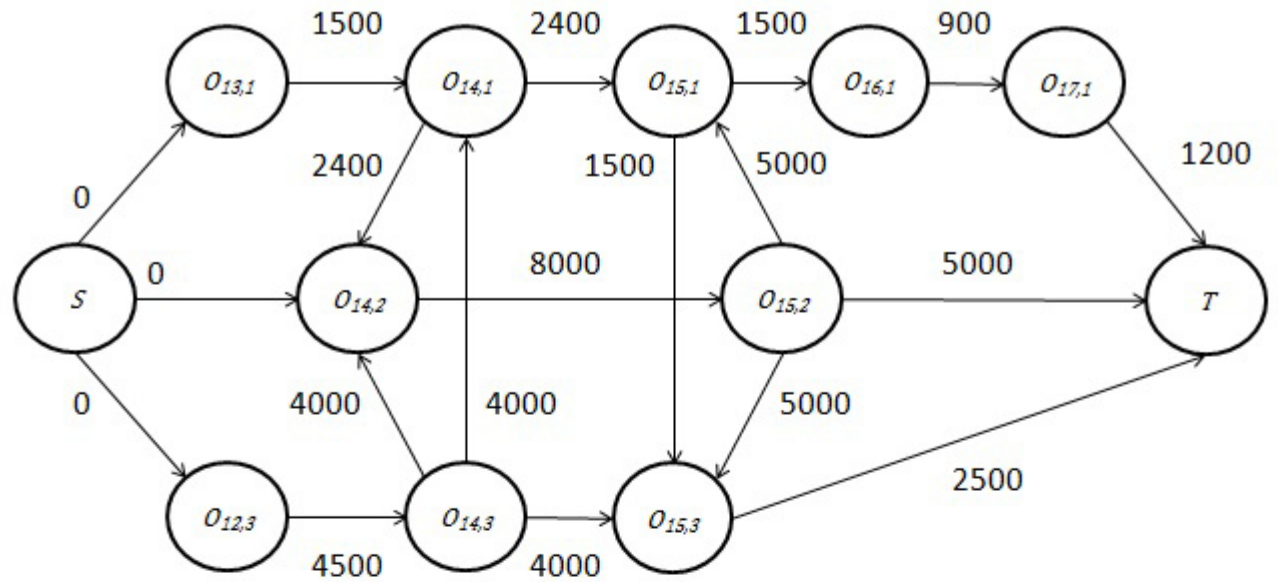


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.37: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga

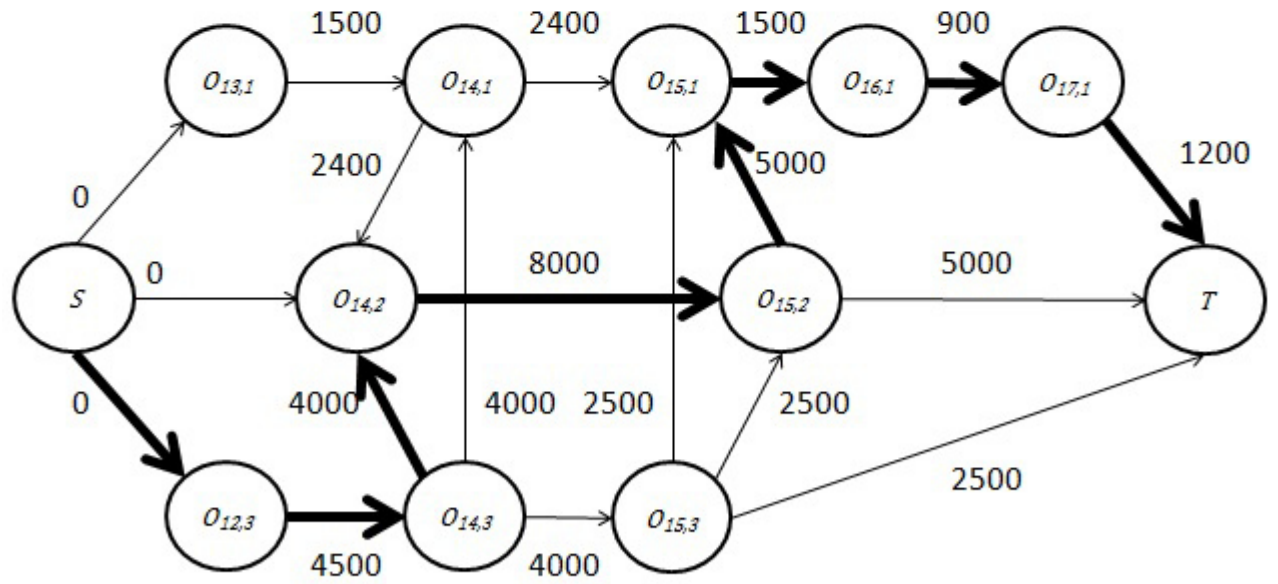
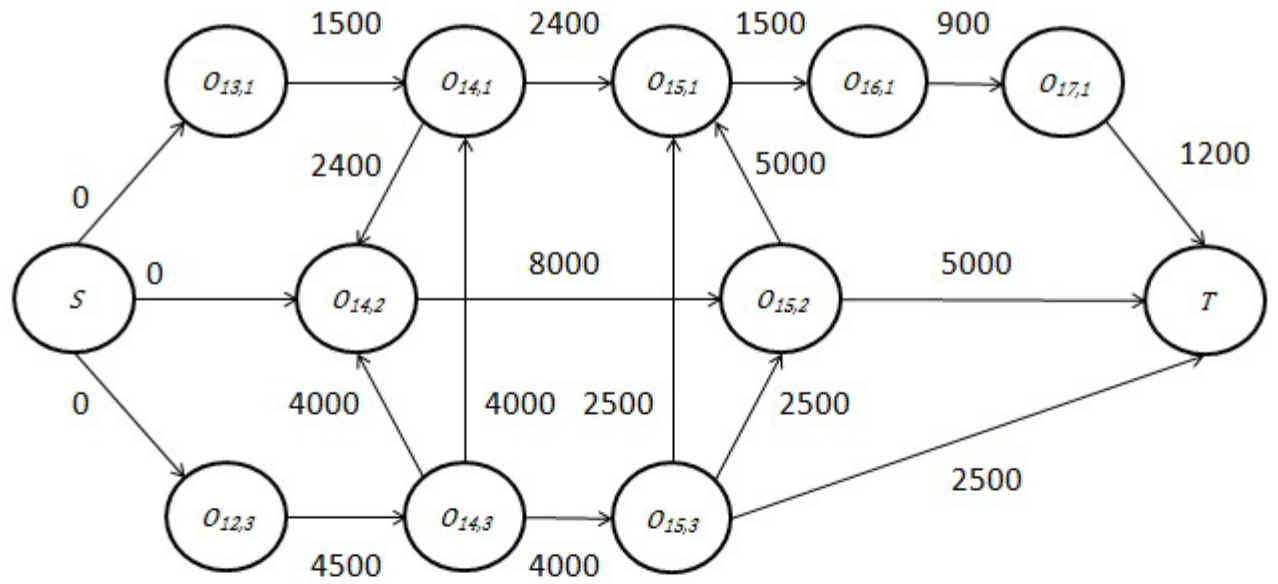


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.38: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

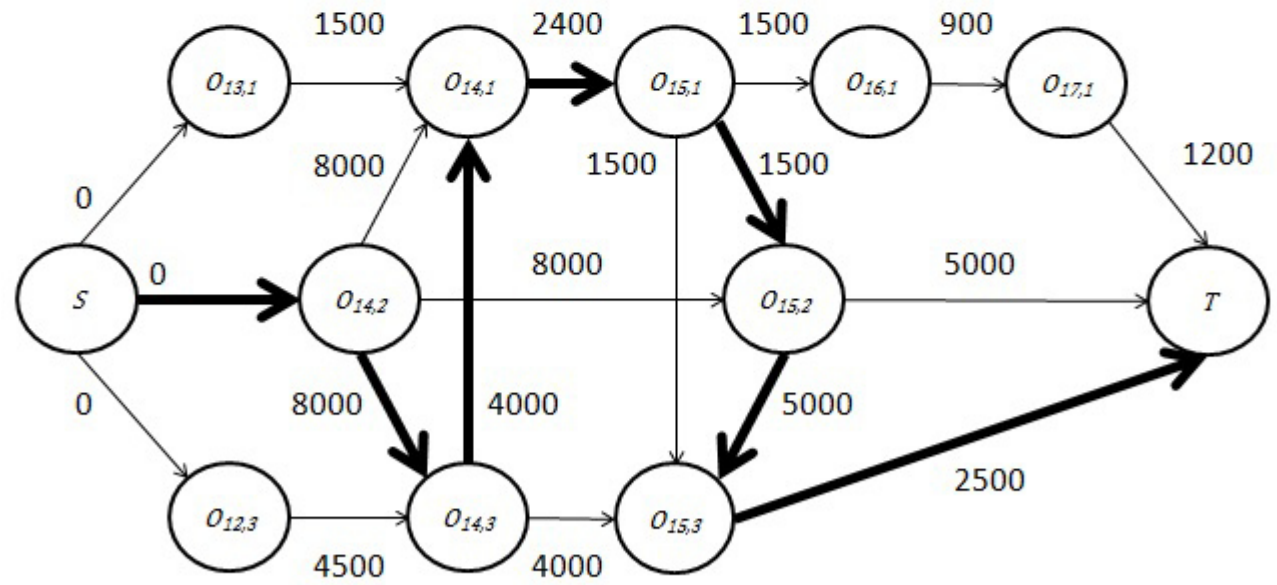
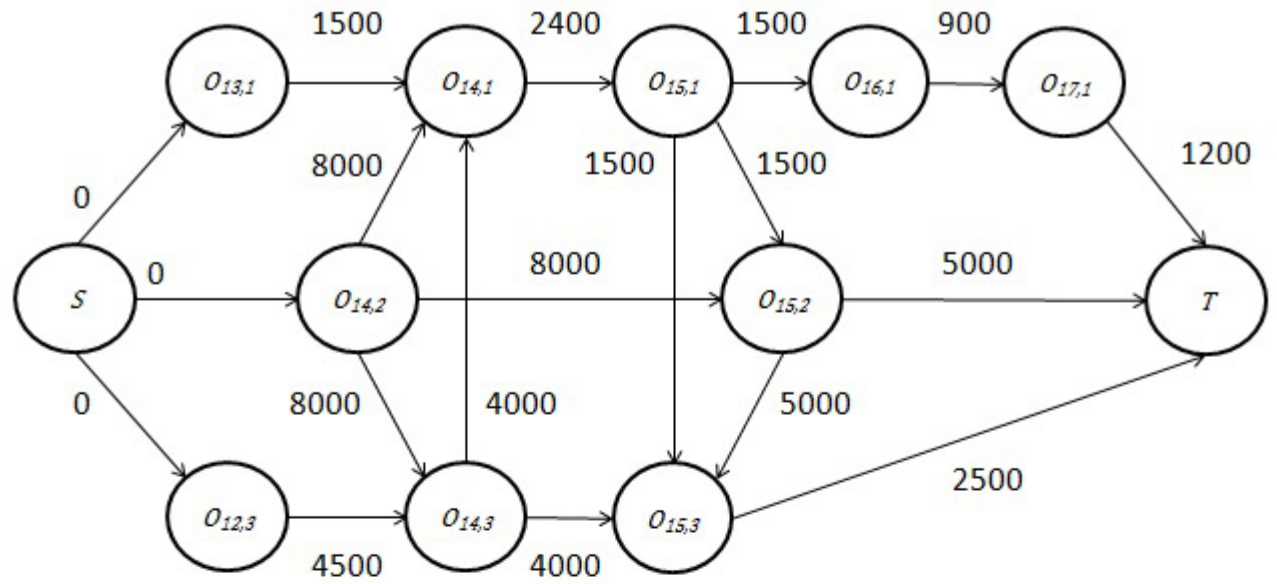


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.39: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



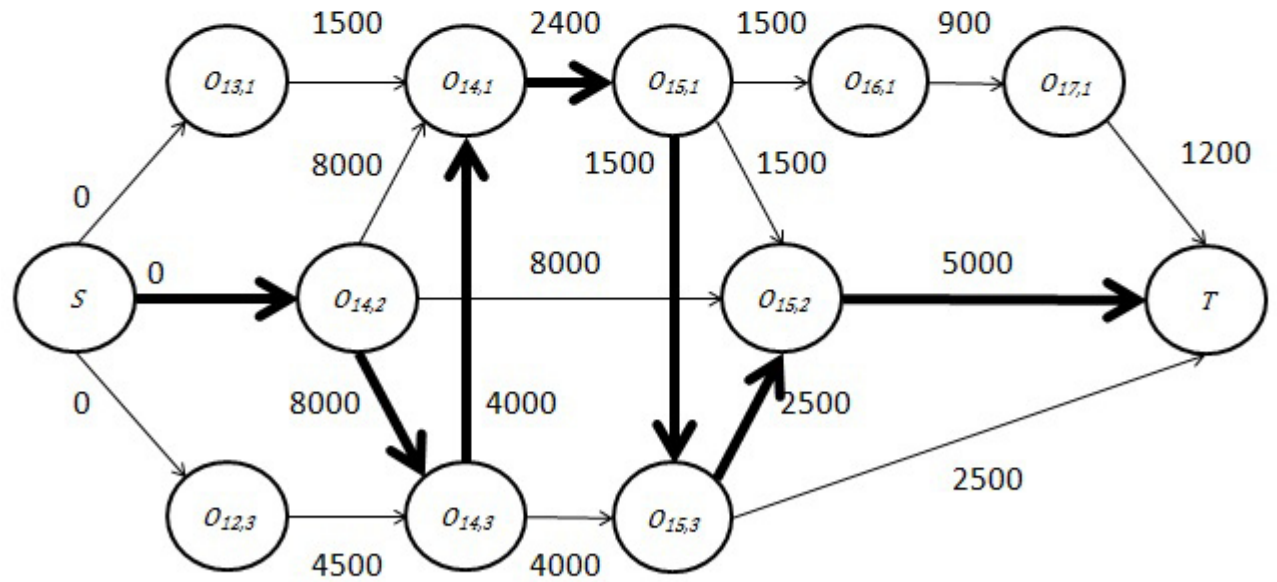
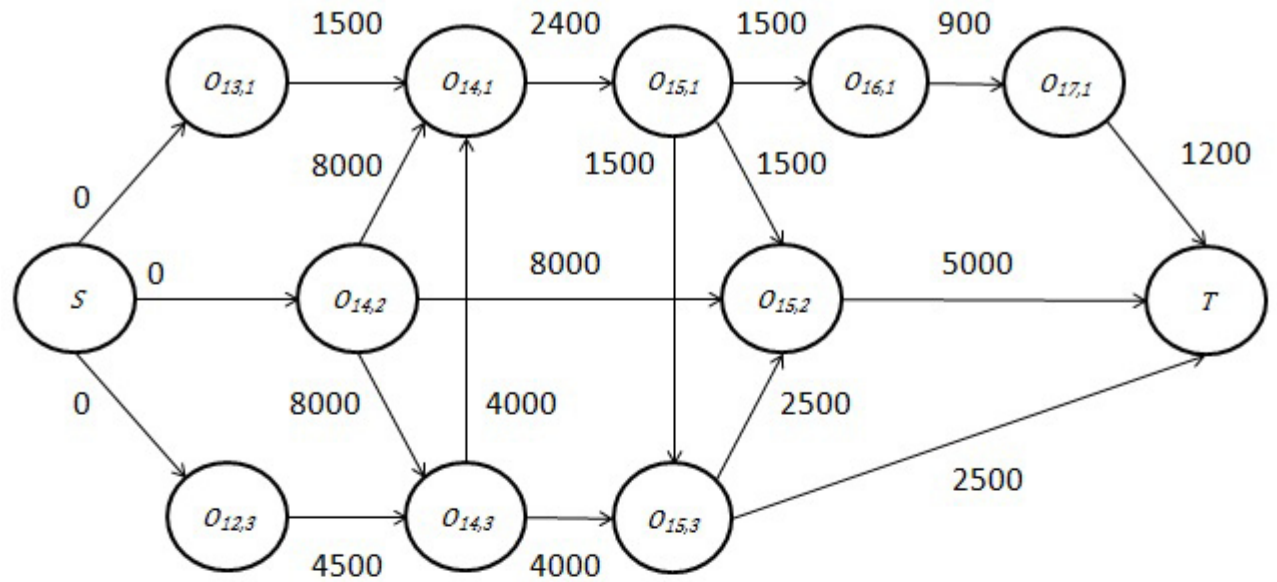
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 23,400$$

Figura 4.40: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga



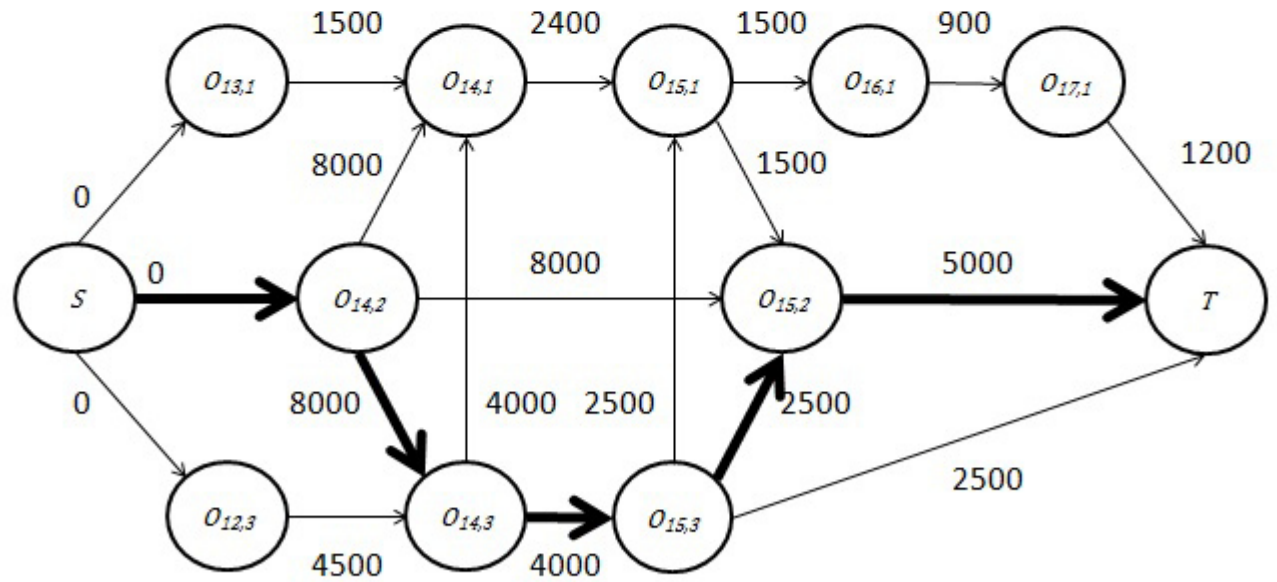
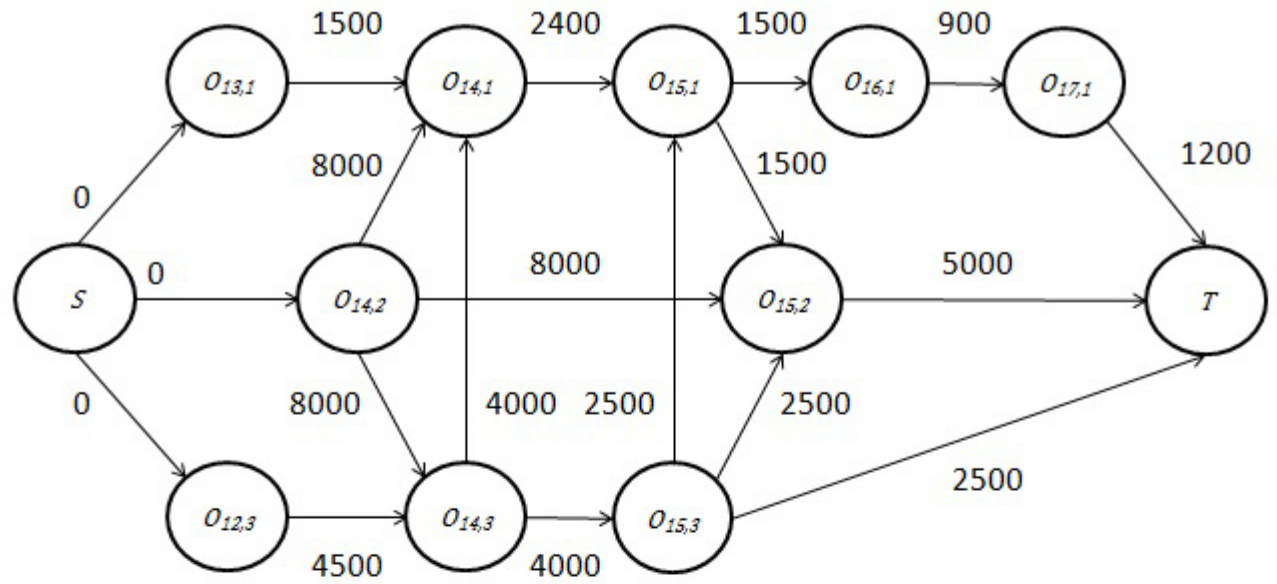


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 23,400$$

Figura 4.41: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

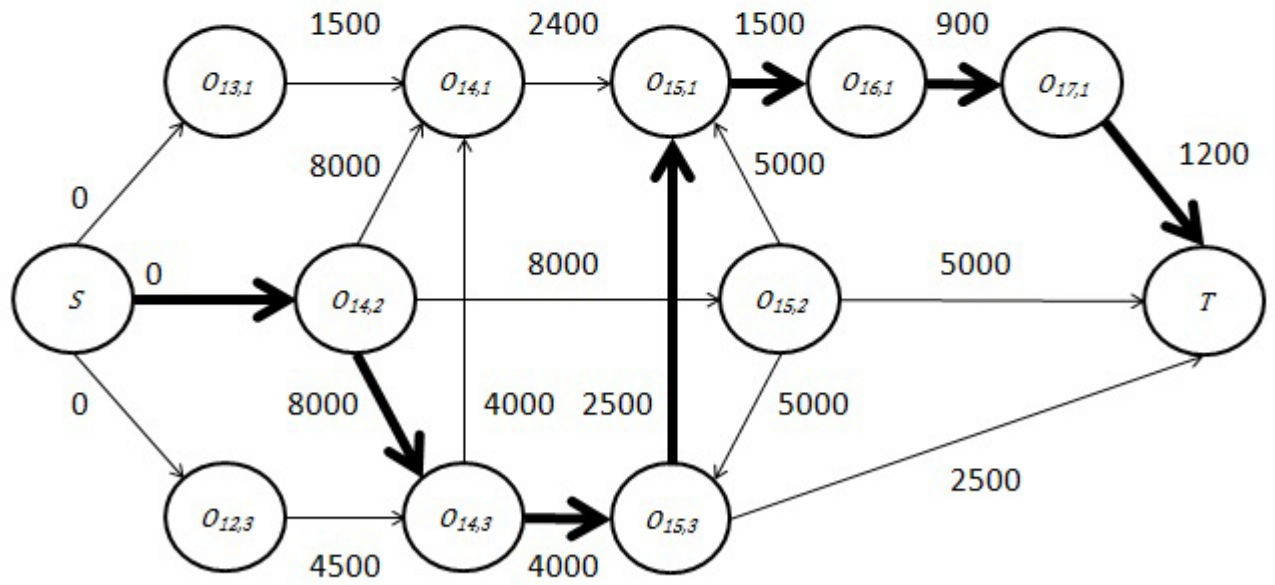
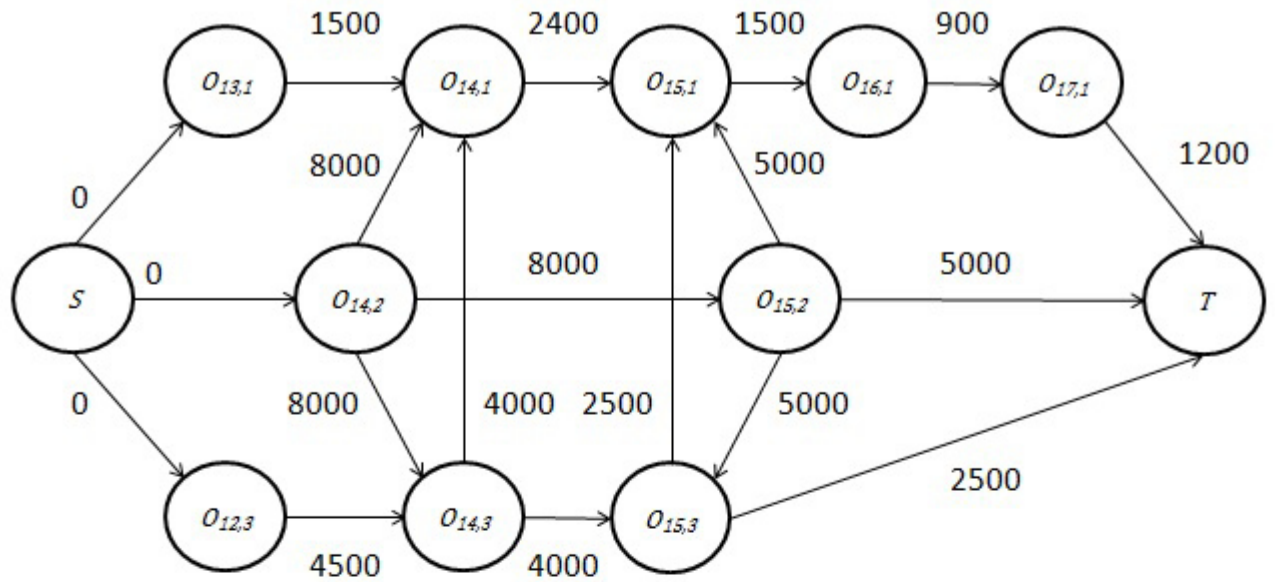


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 19,500$$

Figura 4.42: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

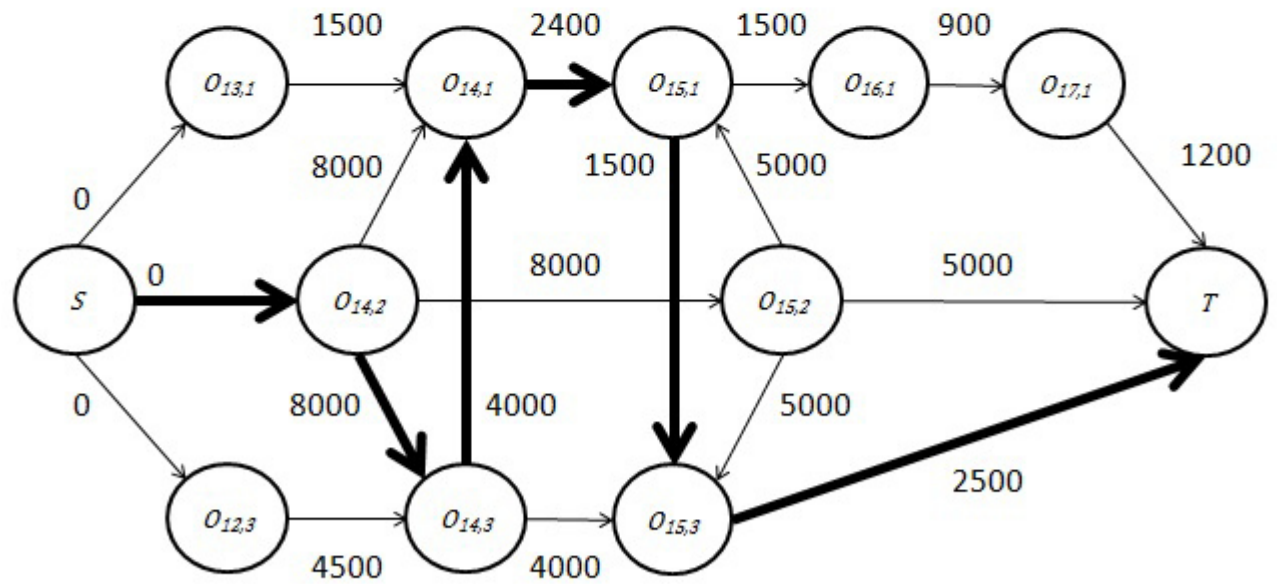
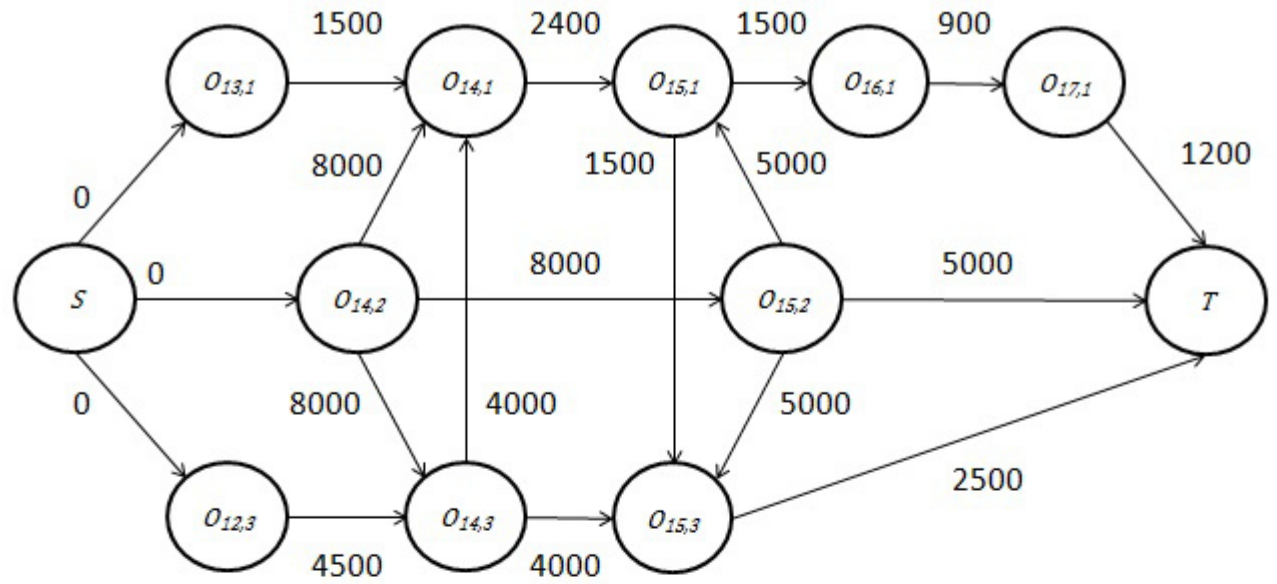


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 18,100$$

Figura 4.43: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga



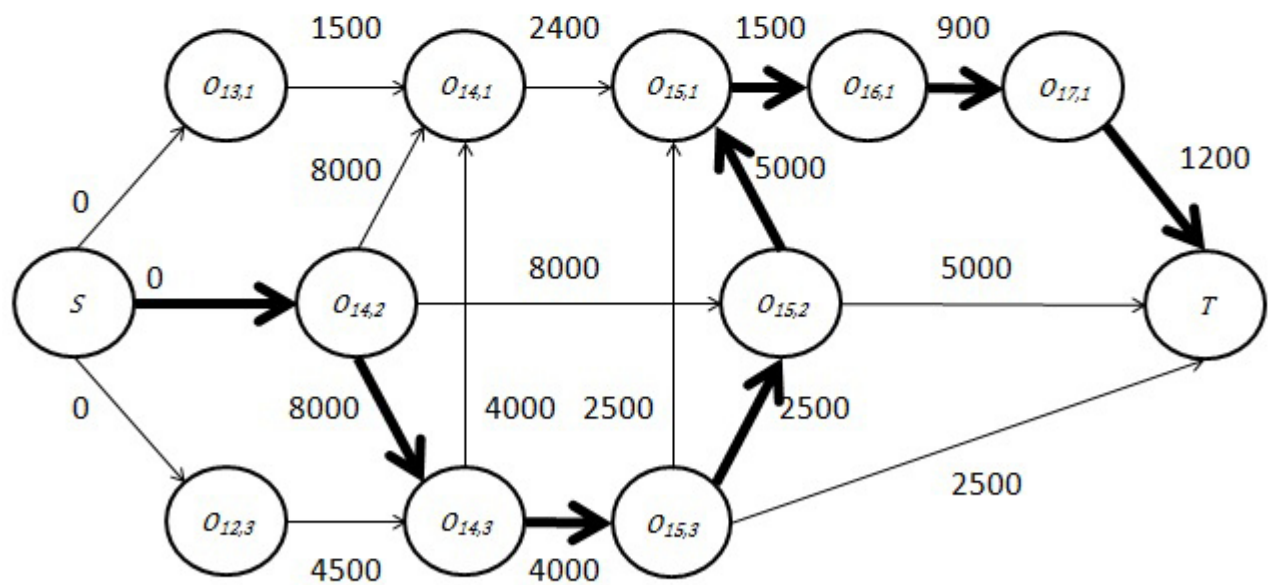
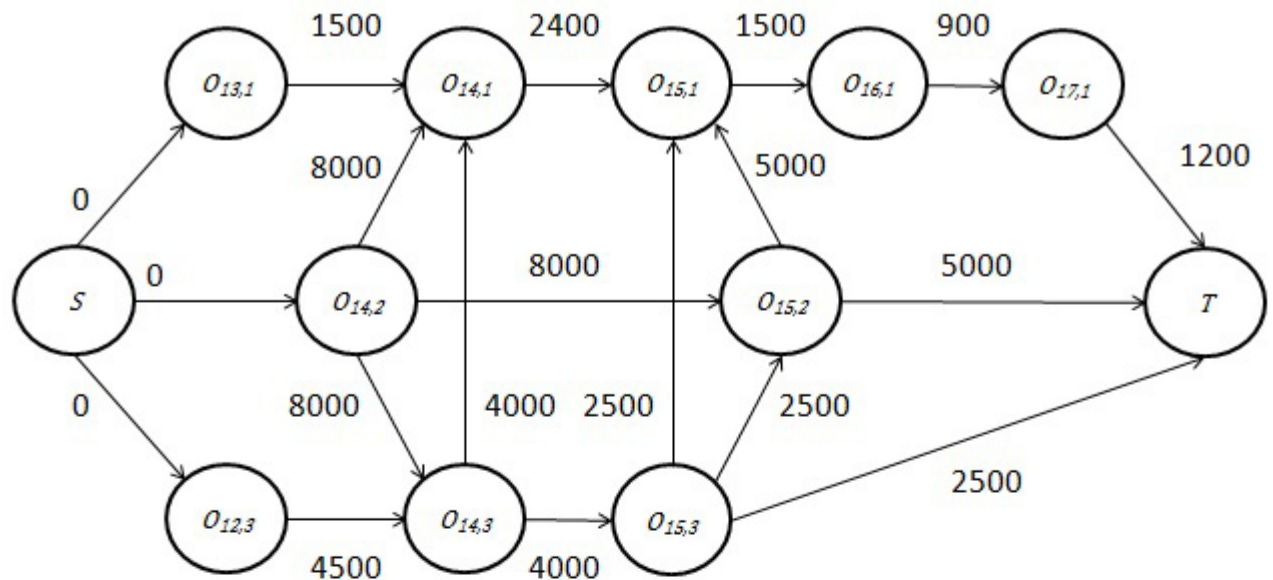
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 18,400$$

Figura 4.44: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga



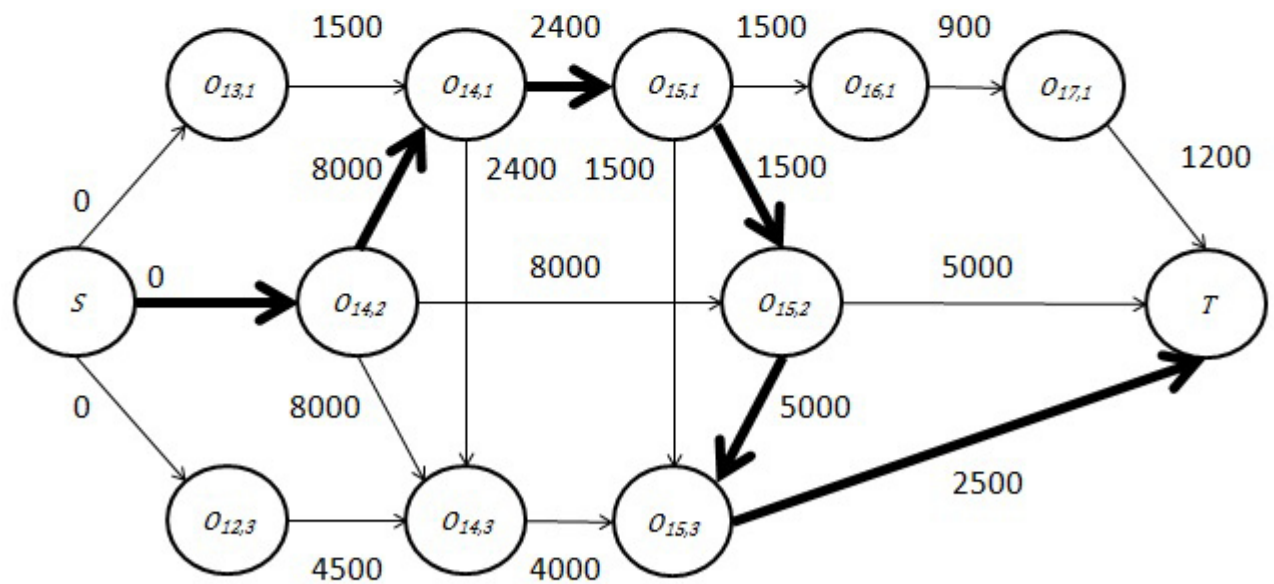
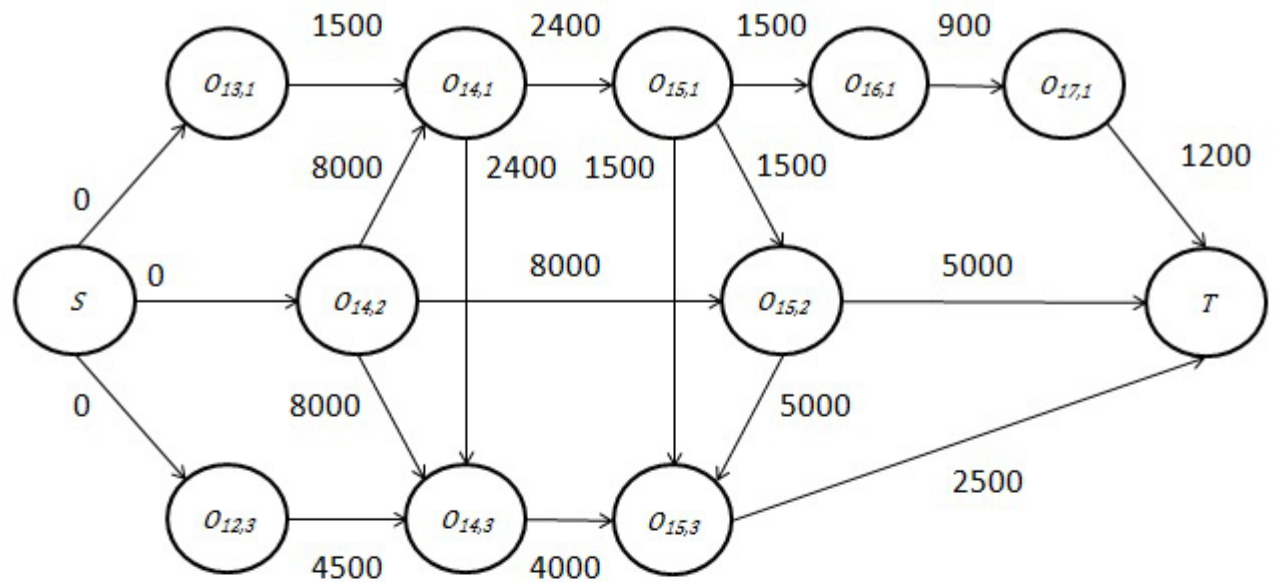


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 23,100$$

Figura 4.45: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

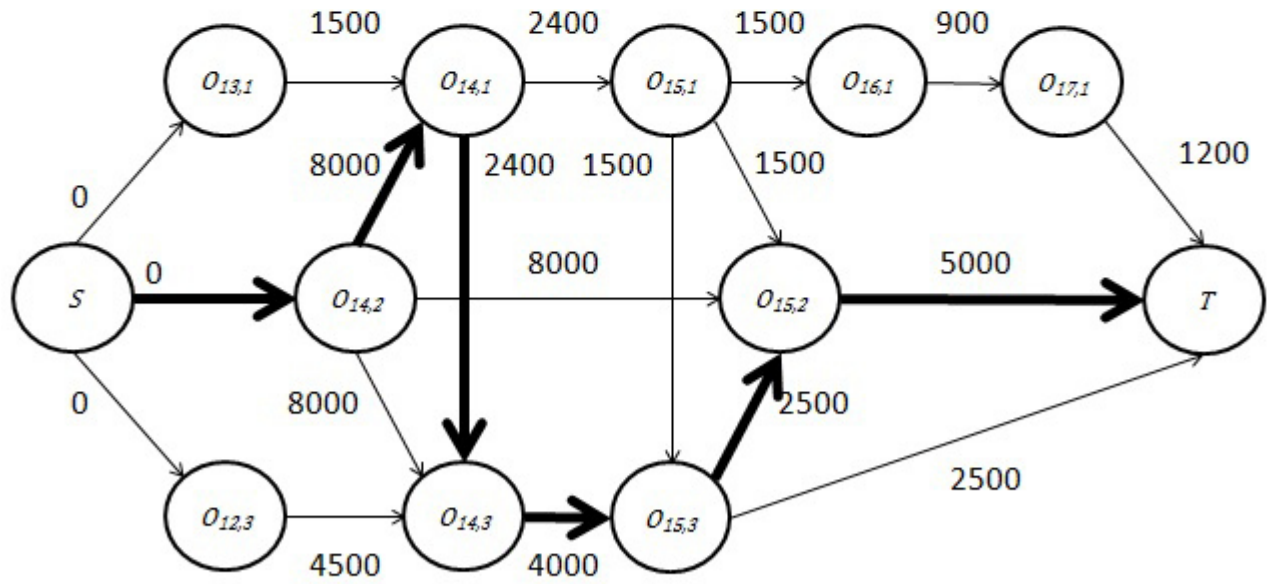
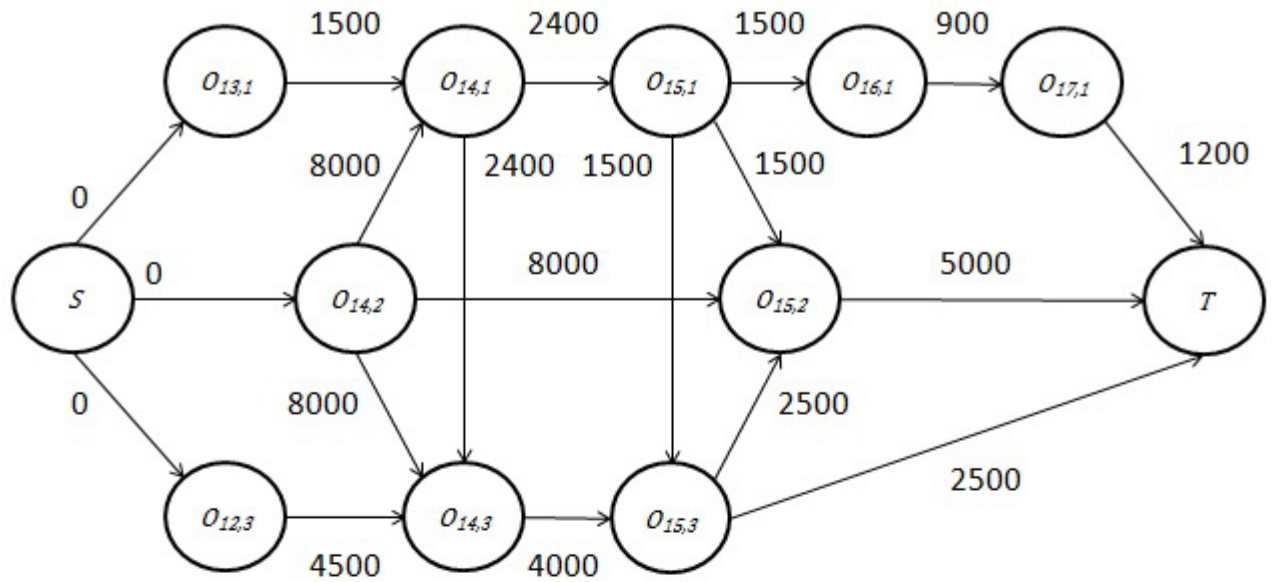


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 19,400$$

Figura 4.46: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

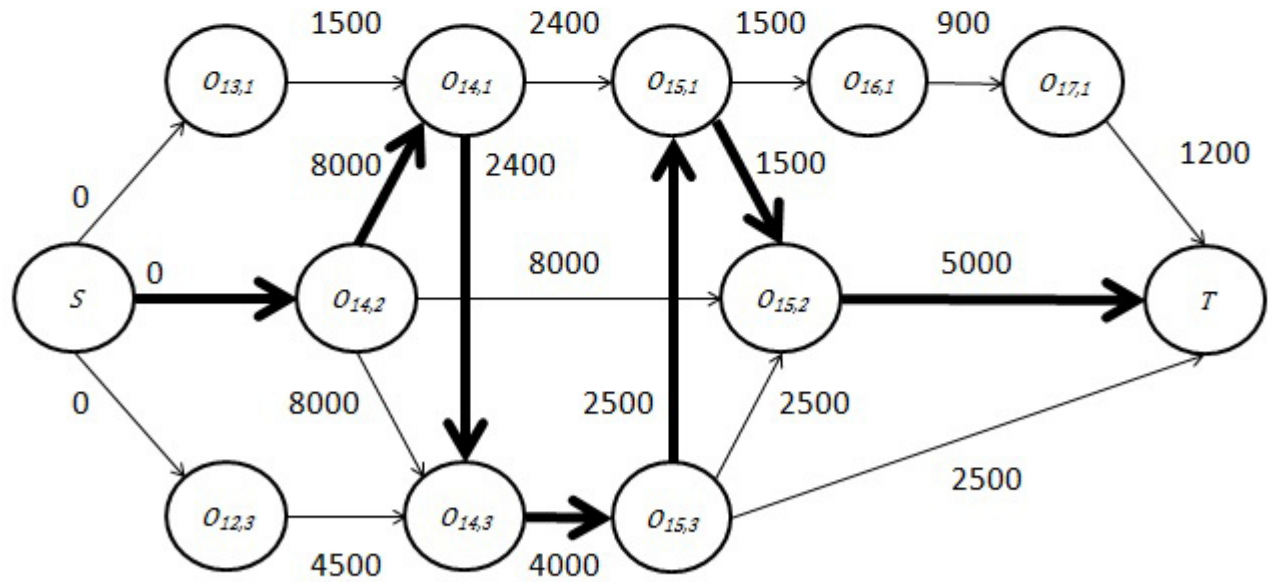
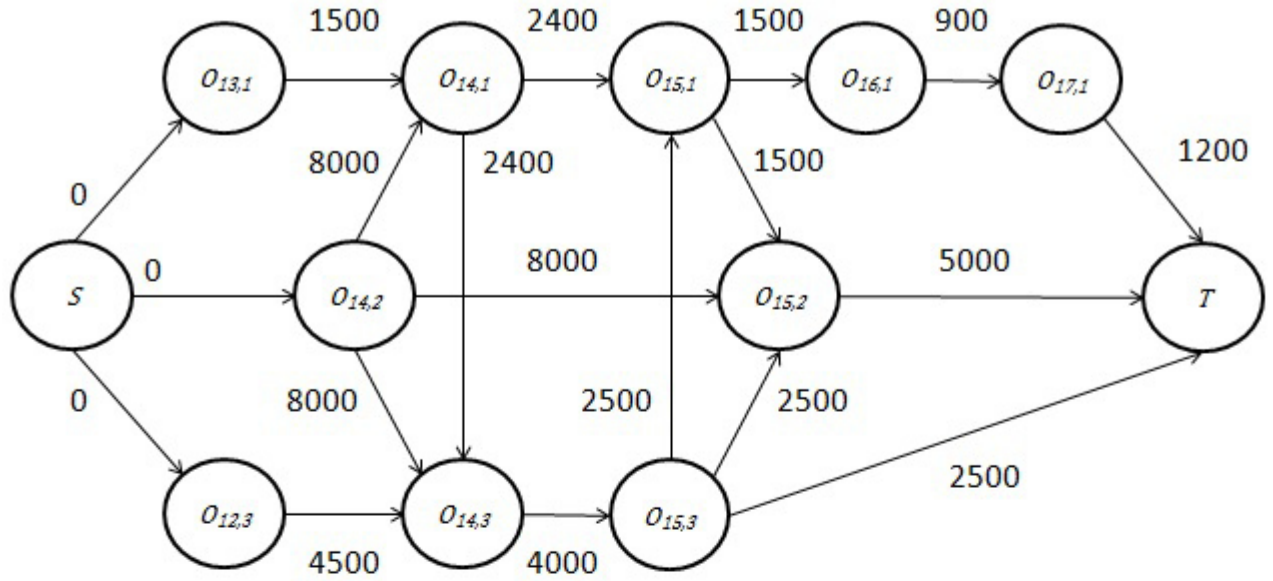


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 21,900$$

Figura 4.47: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



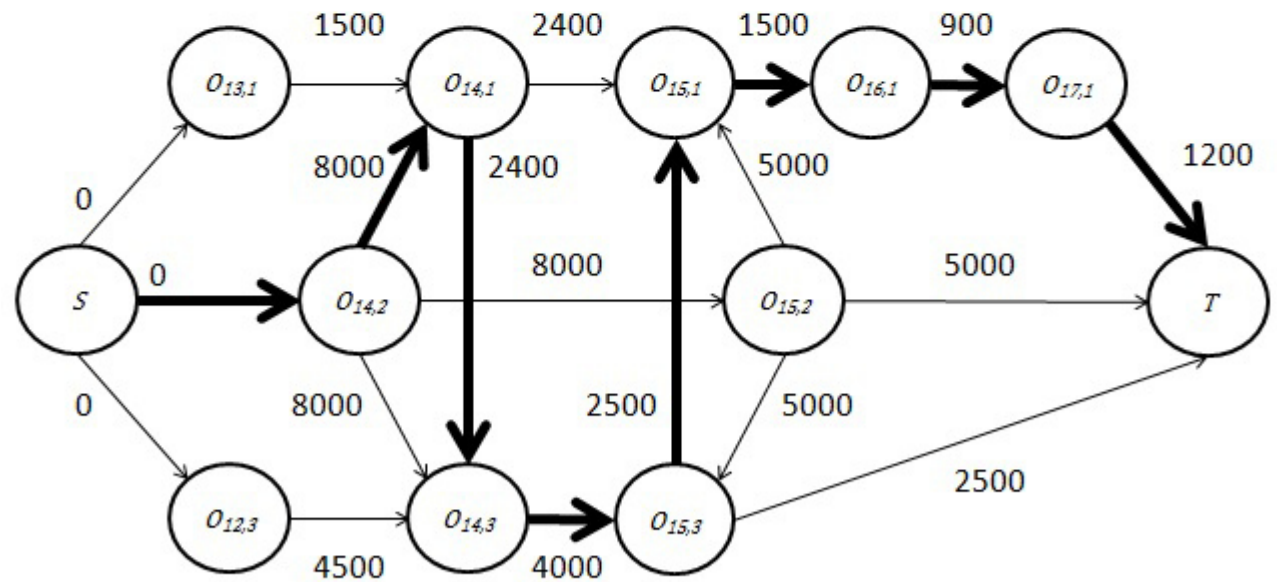
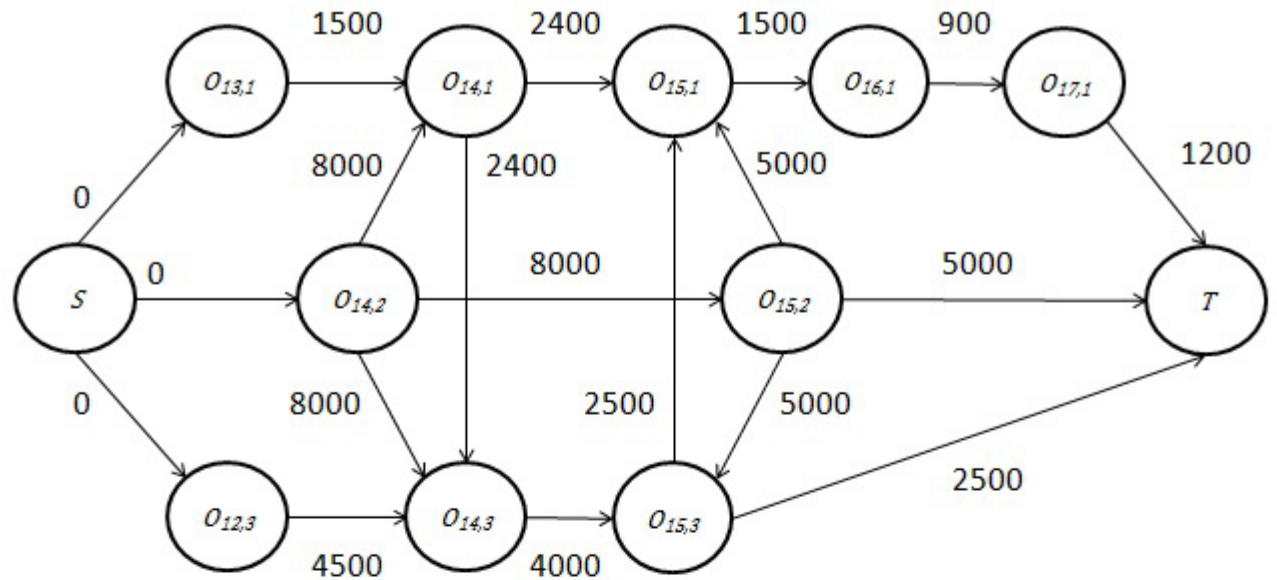
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 23,400$$

Figura 4.48: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



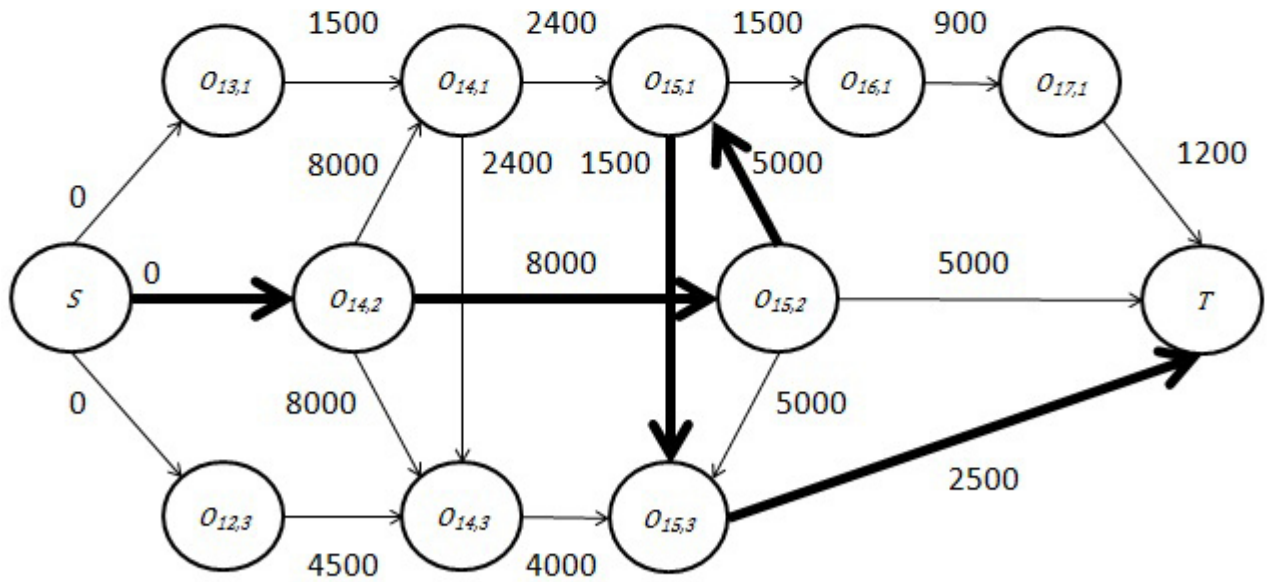
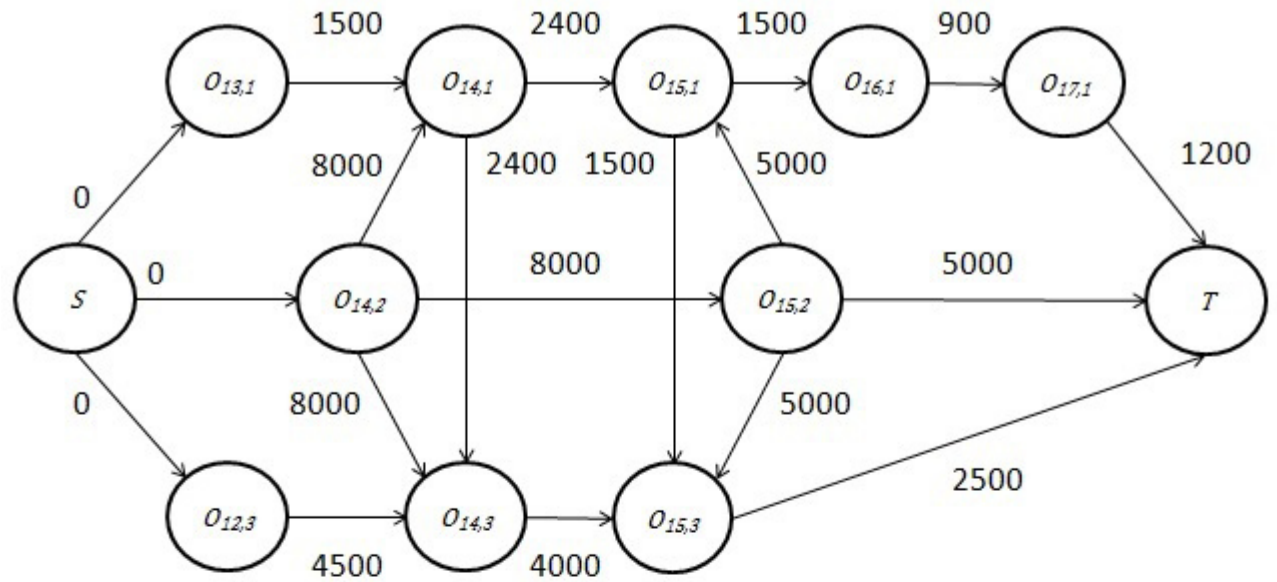


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 20,500$$

Figura 4.49: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga

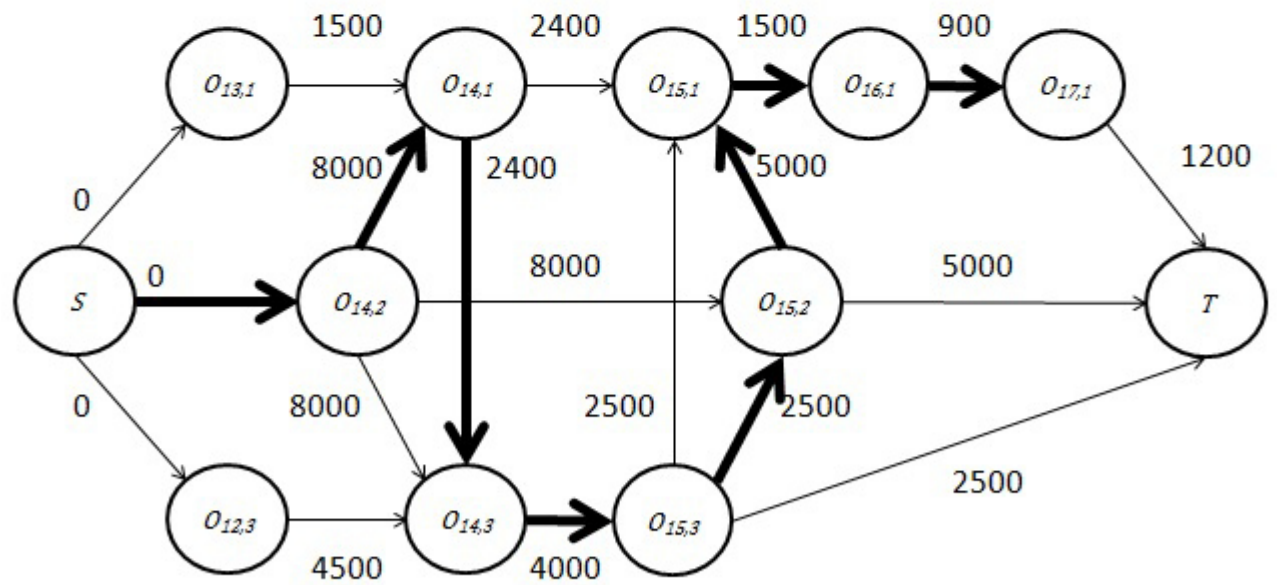
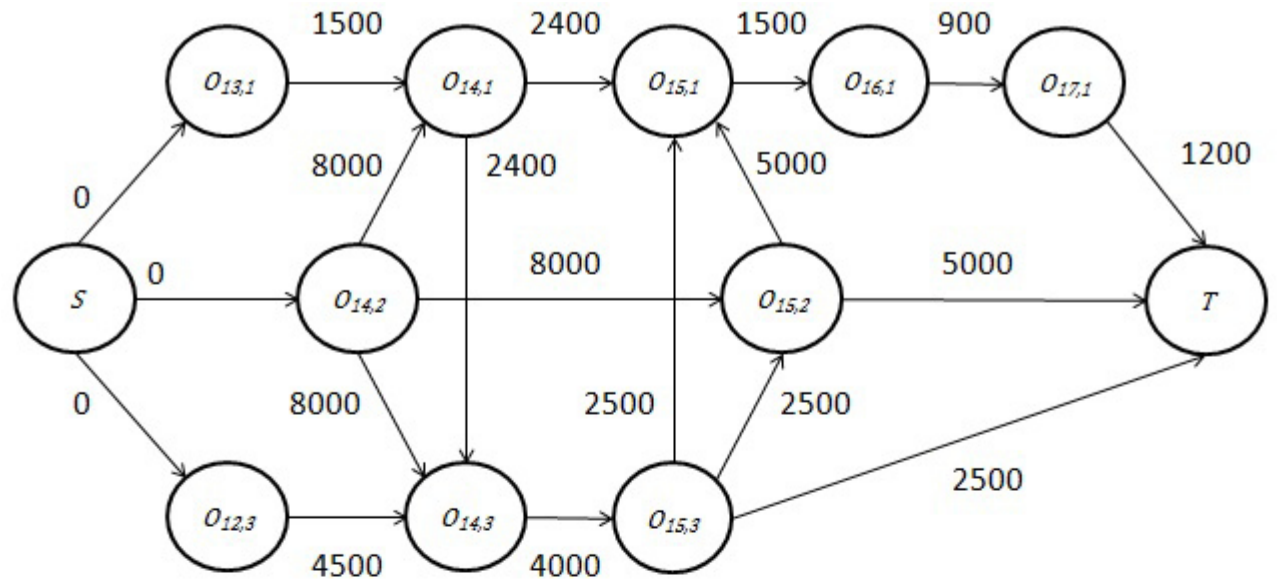


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 17,000$$

Figura 4.50: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga

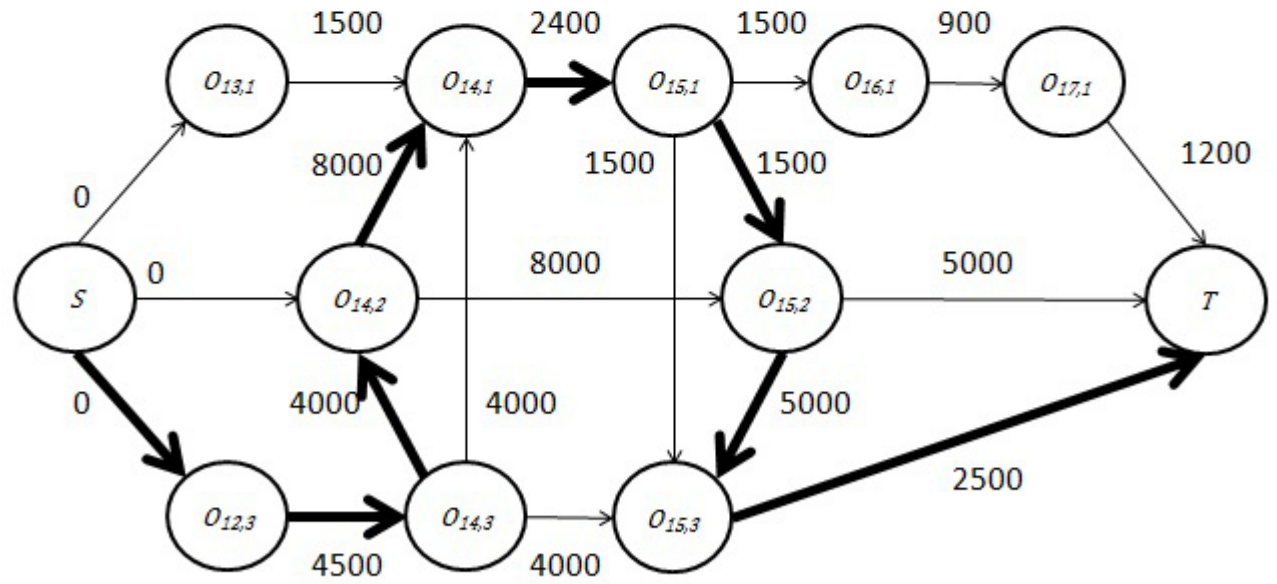
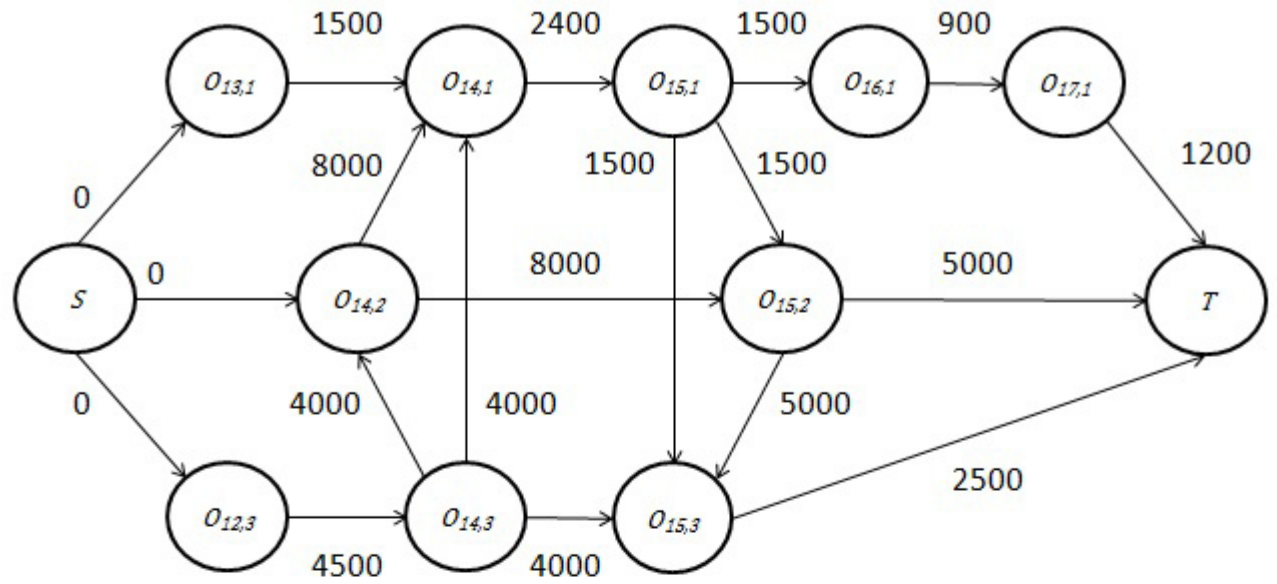


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,500$$

Figura 4.51: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga



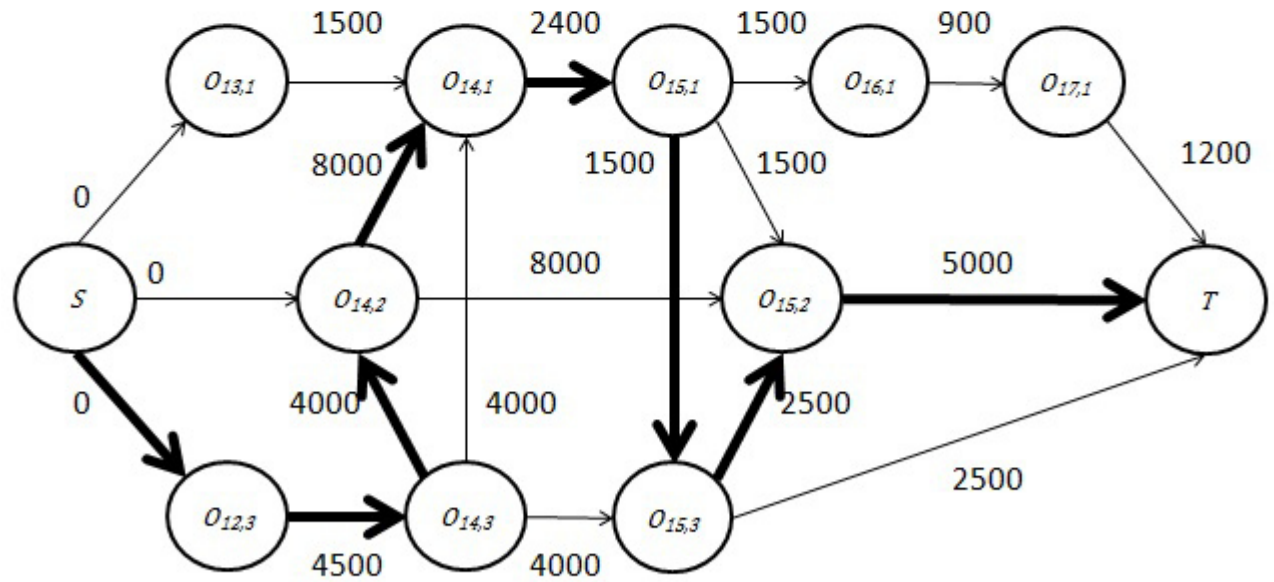
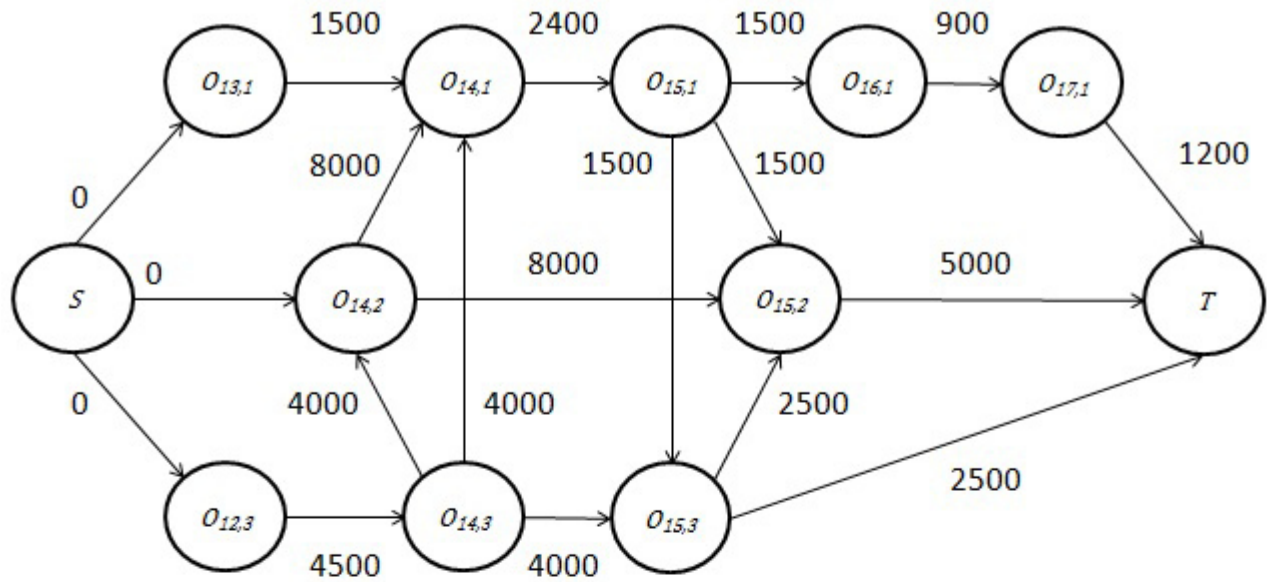
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 27,900$$

Figura 4.52: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga



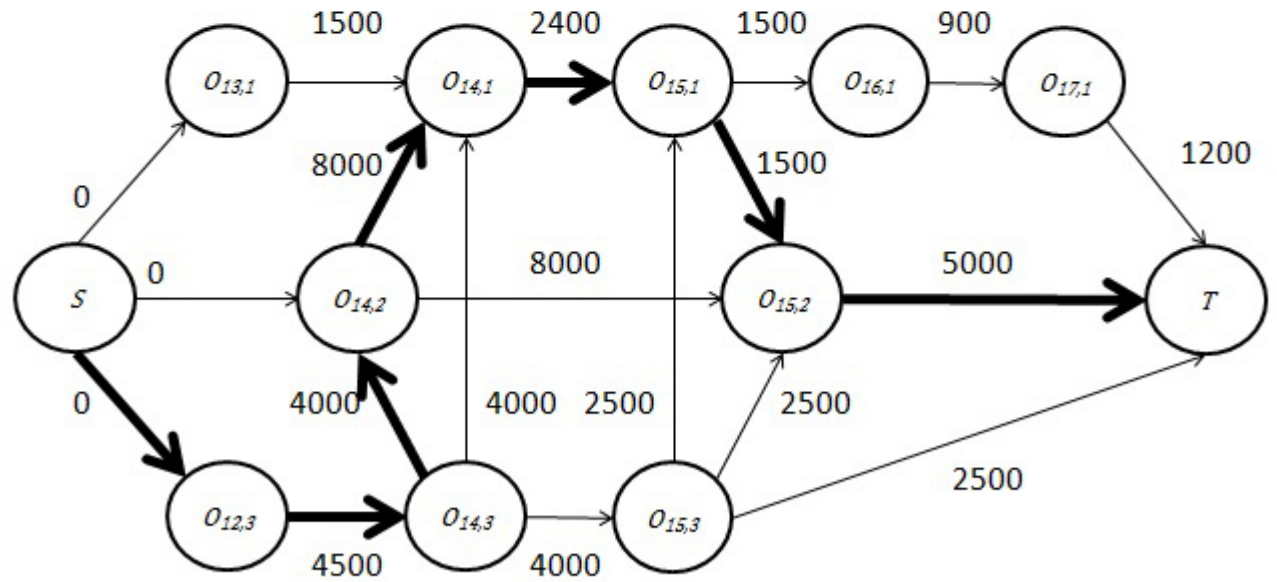
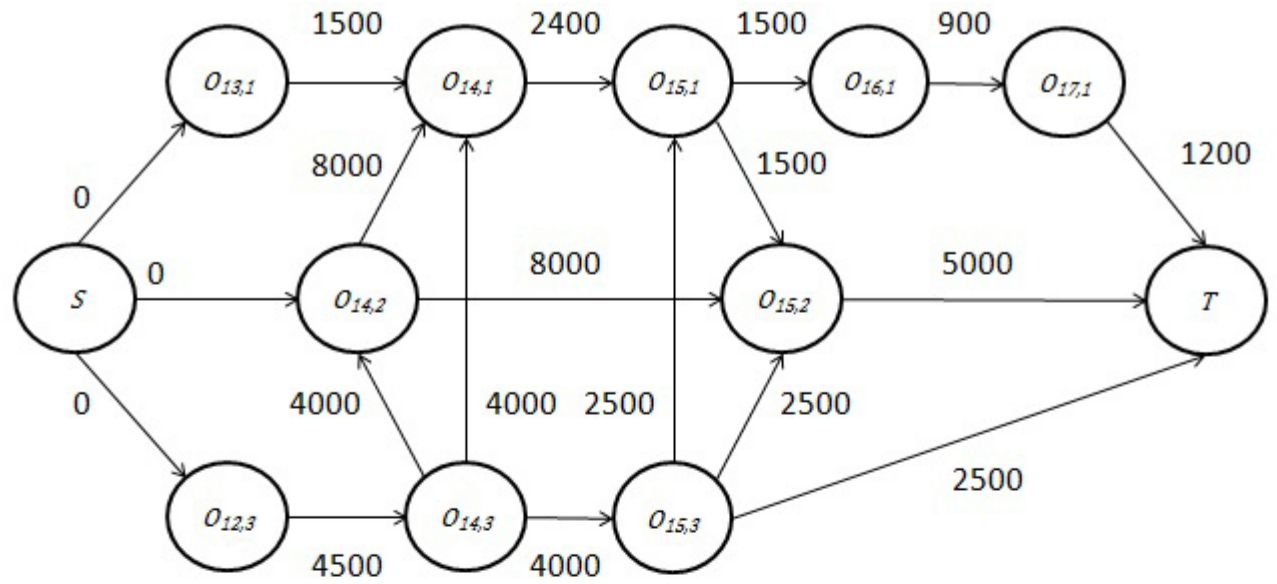


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 27,900$$

Figura 4.53: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

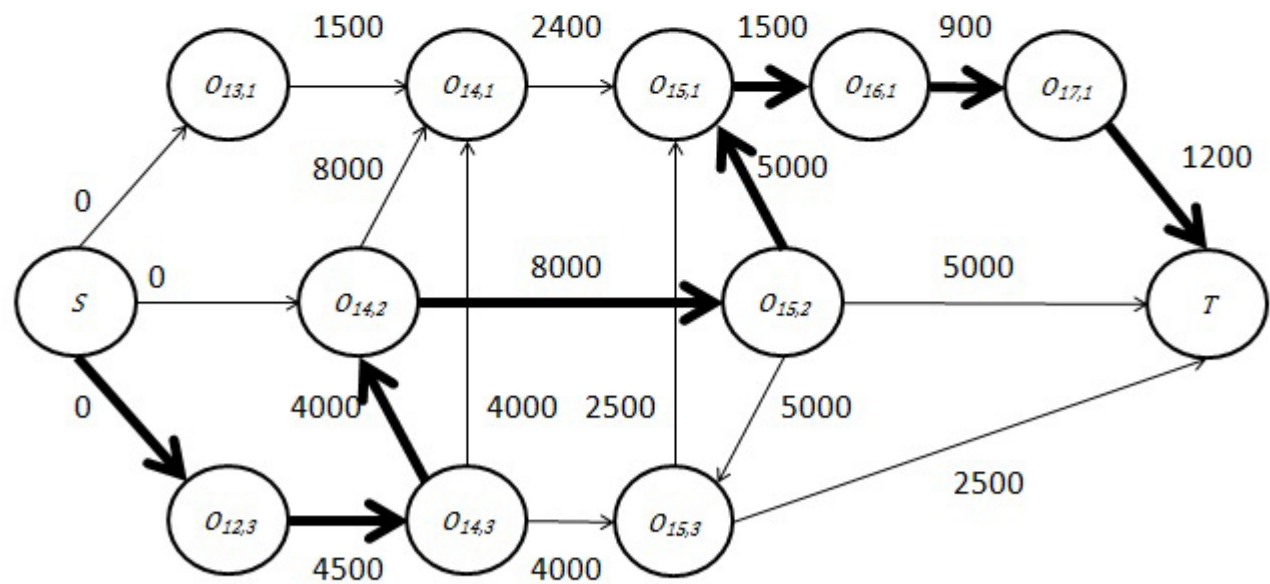
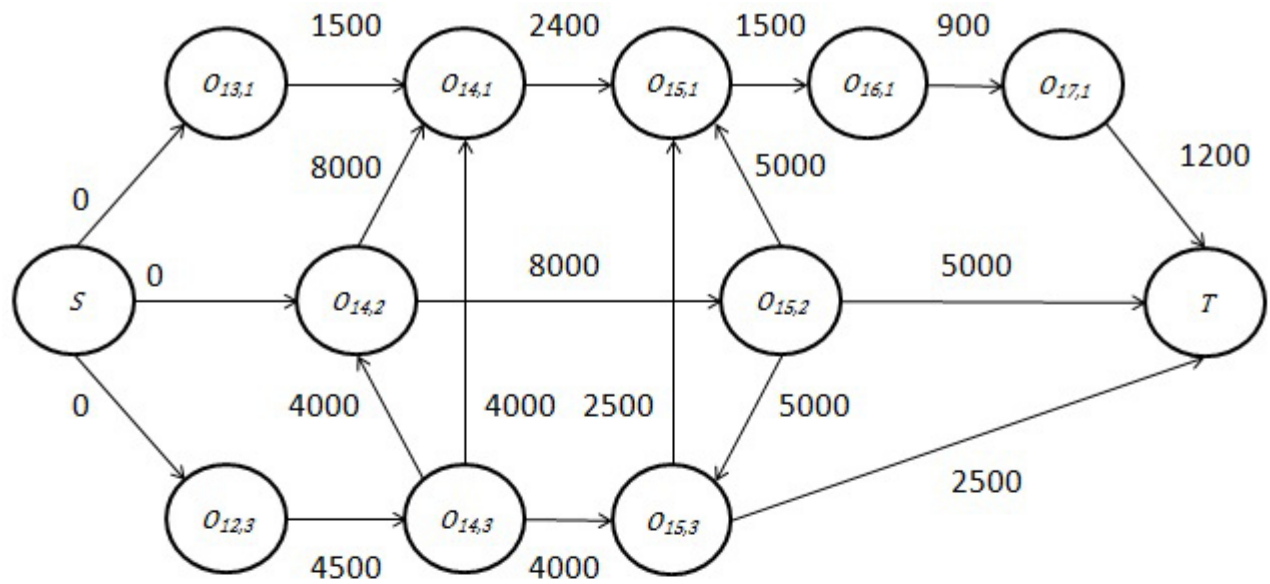


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,400$$

Figura 4.54: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

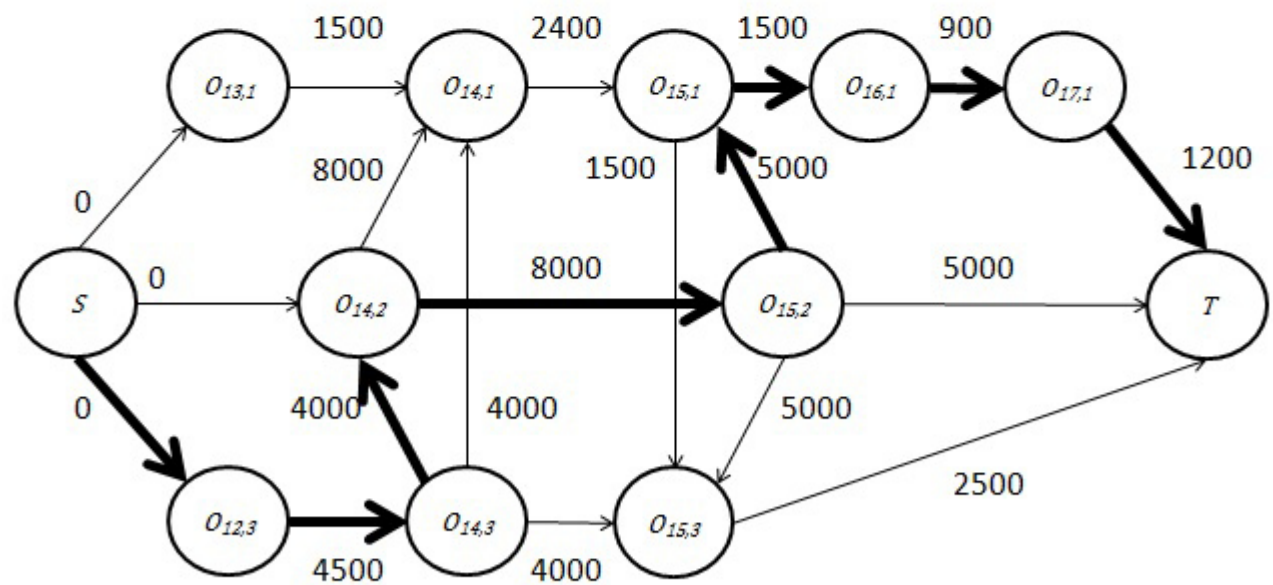
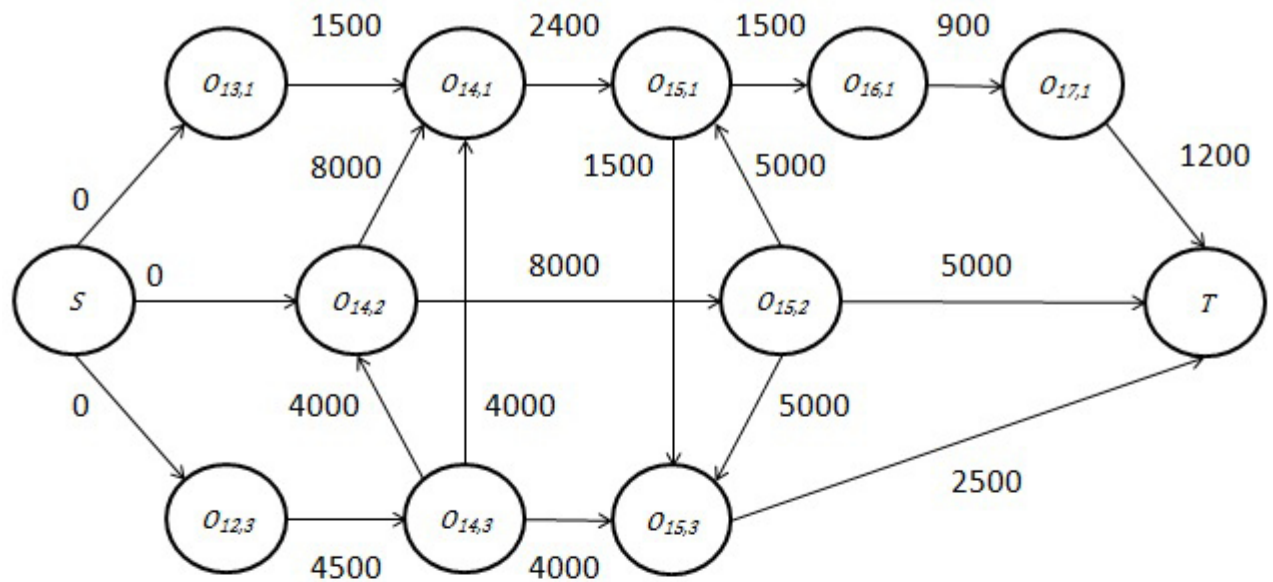


Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.55: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y su respectiva ruta más larga



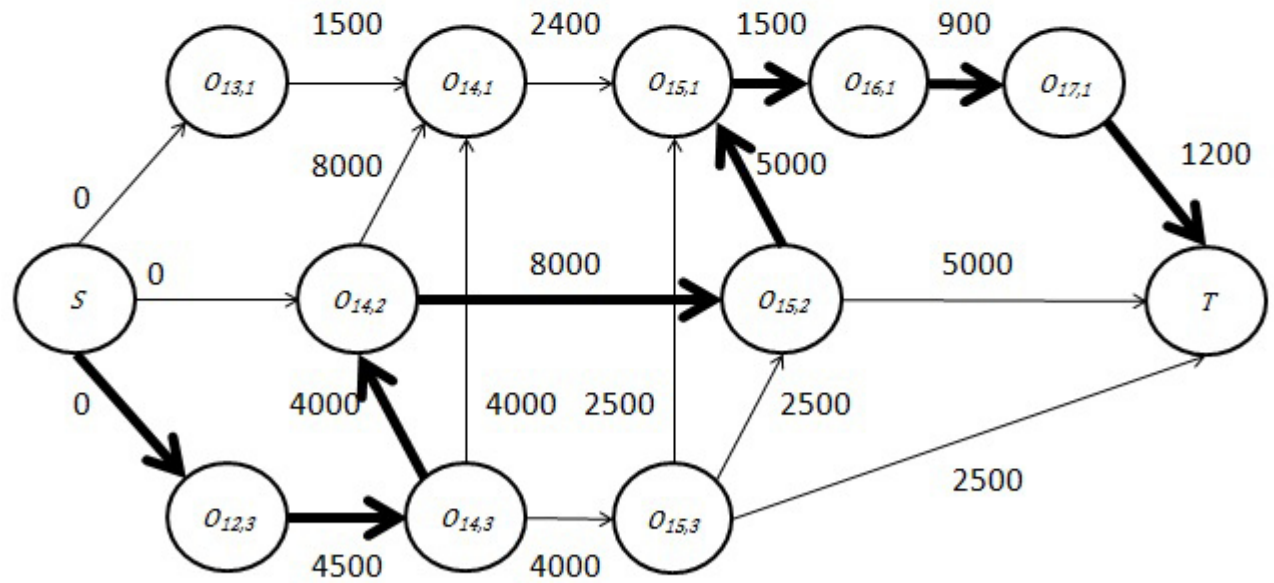
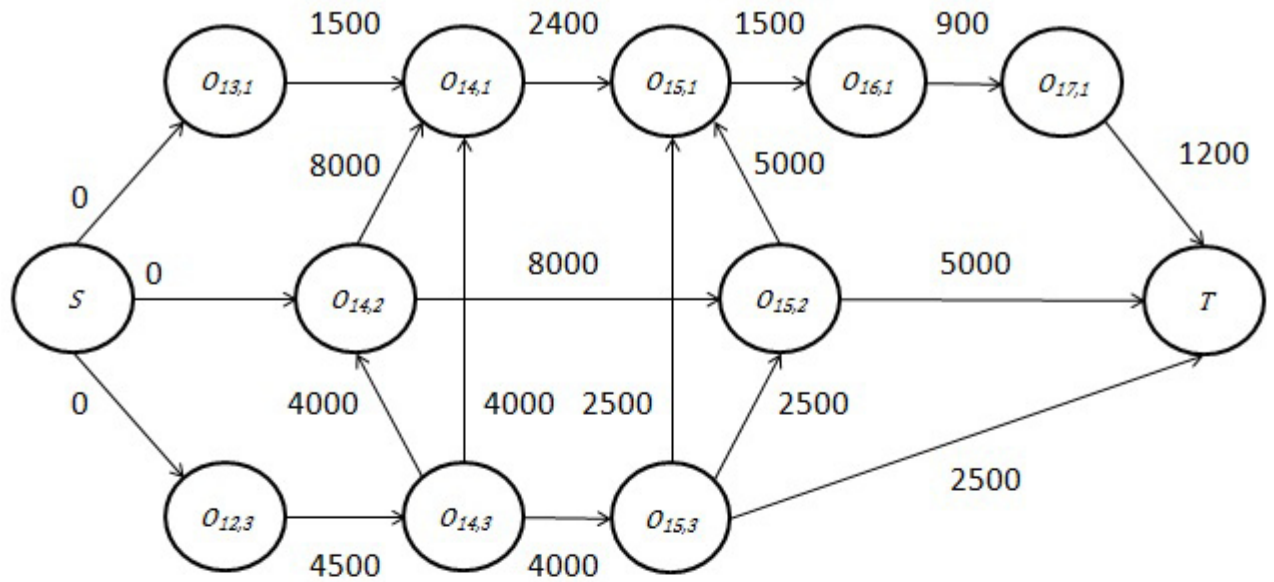
Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.56: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$  y su respectiva ruta más larga





Ruta más larga de  $S$  a  $T$

$$S \rightarrow O_{12,3} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{15,2} \rightarrow O_{15,1} \rightarrow O_{16,1} \rightarrow O_{17,1} \rightarrow T$$

$$C_{\max} = 25,100$$

Figura 4.57: Selección de arcos disyuntivos  $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ ,  $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ ,  $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ ,  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$  y  $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$  y su respectiva ruta más larga

La figura 4.50 muestra la solución a nuestro problema, recordando que la programación disyuntiva funciona seleccionando un arco de cada par de arcos disyuntivos en el grafo sin que se forme un ciclo, para después calcular, de todas las selecciones, la ruta más larga del nodo  $S$  al nodo  $T$  refiriéndose a este al *Makespan*  $C_{max}$ . Una vez calculadas todas las rutas más largas seleccionamos la menor de todas, en otras palabras, lo que se quiere hacer es minimizar el *Makespan*.

La ruta más larga está dada por  $S \rightarrow O_{14,2} \rightarrow O_{14,1} \rightarrow O_{14,3} \rightarrow O_{15,3} \rightarrow T$ , con un  $C_{max} = 16,900$ .

La figura 4.58 es el diagrama de gantt correspondiente al problema propuesto, en el cual podemos observar el orden de los trabajos en las máquinas: en la máquina 12 (el asa en la bolsa) se procesa únicamente el trabajo 3 (pedido 3), en la máquina 13 se procesa solo el trabajo 1 (pedido 1), en la máquina 14 (elaboración de la base) se procesa el trabajo 2 (pedido 2), 1 (pedido 1) y 3 (pedido 3) en ese orden, en la máquina 15 (pegado de la base) se procesa el trabajo 2 (pedido 2), 1 (pedido 1), y 3 (pedido 3) también en el mismo orden, en la máquina 16 (cordón en la bolsa) y 17 (pegado del cordón) solo se procesa el trabajo 1 (pedido 1). Con este orden trabajos en las máquinas se obtiene un *Makespan* de 17,000 segundos (aproximadamente 4 horas con 43 minutos).

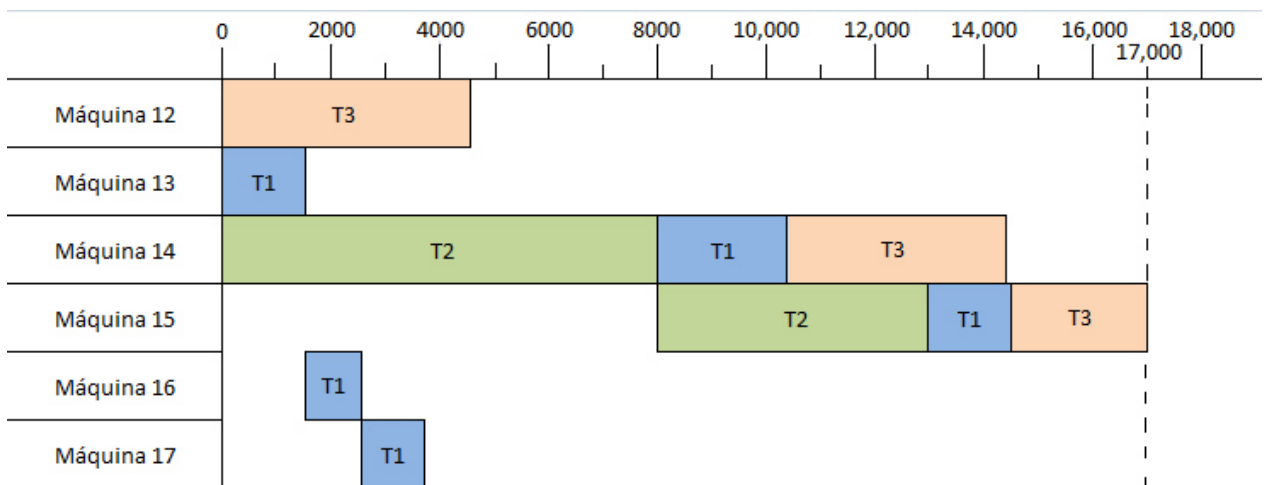


Figura 4.58: Diagrama de Gantt

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSIONES

---

## 5.1 CONCLUSIONES

En este trabajo se explicaron algunos de los problemas principales de secuenciación de trabajos tales como los problemas de máquina única, máquinas paralelas, tipo taller, taller de flujo. En cada uno de ellos se vieron sus características y se tomaron instancias dadas en la literatura para mostrar herramientas matemáticas y así dar soluciones a dichos problemas.

Se realizó un análisis para el problema de secuenciación de trabajos de tipo taller, explicando 2 métodos de solución; la Programación Disyuntiva y la heurística Cuello de Botella Móvil. Al explicar la programación disyuntiva la cual involucra grafos disyuntivos, se investigó acerca de la complejidad del problema, el cual crece de manera exponencial, exactamente se pueden tener  $(n!)^m$  secuencias posibles, donde  $n$  es el número de trabajos y  $m$  el número de máquinas.

Se presentó un caso de estudio en la empresa *Diseños* la cual elabora bolsas de papel, en general se platicó cómo funciona la empresa, con qué recursos cuenta para obtener sus productos. Se mostraron todos los pasos correspondientes para llegar a la bolsa, en cada uno de ellos se explicó como es la operación correspondiente tomando datos reales proporcionados por la empresa. Se analizó el problema de la

empresa y se llegó a la de que el problema que presenta la empresa se asocia con el problema de secuenciación de trabajos tipo taller. Gracias a la investigación se sabe que existen diferentes herramientas matemáticas que ayuda a encontrar soluciones, una de ellas es la programación disyuntiva la cual trabaja con grafos. Debido a que se trabajó analíticamente la programación disyuntiva, en el grafo original solo se tomaron en cuenta ciertas operaciones ya que observando el grafo disyuntivo asociado al problema general que presenta la empresa se llega a tener  $2.1536 \times 10^{24}$  secuencias posibles.

## 5.2 TRABAJO A FUTURO

En esta sección mencionaremos algunos puntos importantes para mejorar la investigación.

Cuando se mostró el grafo disyuntivo asociado al problema que presenta la empresa, solo dimos una solución a una parte del grafo, específicamente las últimas operaciones, debido a que se explicó analíticamente el problema.

En la empresa semanalmente realizan pedidos, por ende cada semana se tienen diferentes instancias, con esto nos enfocaríamos en aplicar el método exacto de programación disyuntiva de manera computacional y así obtener soluciones y analizar estas. Después de estudiar el método exacto resultaría interesante aplicar e implementar heurísticas y compararlas. Con todo esto se esperaría que mejore la empresa en muchos aspectos, se sabe que al elaborar los productos cuenta con ciertos recursos y con ellos se trabaja, podríamos simular para ver que tanto mejora la empresa si se agregan más máquinas, en este caso contratar personal y así capacitarlos para la manufactura.

Otro punto fue que al hacer el análisis al problema nos percatamos que algunas operaciones se pueden realizar al mismo tiempo, esto se asocia con características de máquinas paralelas, entonces el problema se pudiera ver como un problema tipo



---

taller con características de máquinas paralelas.

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Grafo de restricciones de precedencia . . . . .	8
2.2. Procedimiento de asignación del trabajo 4 y 2 . . . . .	18
2.3. Procedimiento de asignación del trabajo 5 y 1 . . . . .	19
2.4. Procedimiento de asignación del trabajo 6 y 3 . . . . .	19
2.5. Sistema de Flow Shop . . . . .	20
2.6. Sistema de Job Shop . . . . .	21
3.1. Grafo Disyuntivo . . . . .	24
3.2. Selección de arcos disyuntivos . . . . .	28
3.3. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{11} \rightarrow$ $O_{13}, O_{23} \rightarrow O_{22}$ y $O_{31} \rightarrow O_{32}$ . . . . .	29
3.4. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{11} \rightarrow$ $O_{13}, O_{22} \rightarrow O_{23}$ y $O_{31} \rightarrow O_{32}$ . . . . .	29
3.5. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{11} \rightarrow$ $O_{13}, O_{23} \rightarrow O_{22}$ y $O_{32} \rightarrow O_{31}$ . . . . .	30
3.6. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{11} \rightarrow$ $O_{13}, O_{23} \rightarrow O_{22}$ y $O_{31} \rightarrow O_{32}$ . . . . .	30

3.7. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{13} \rightarrow O_{11}, O_{23} \rightarrow O_{22}$ y $O_{32} \rightarrow O_{31}$ . . . . .	31
3.8. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{13} \rightarrow O_{11}, O_{23} \rightarrow O_{22}$ y $O_{31} \rightarrow O_{32}$ . . . . .	31
3.9. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{13} \rightarrow O_{11}, O_{22} \rightarrow O_{23}$ y $O_{32} \rightarrow O_{31}$ . . . . .	32
3.10. Ruta más larga de $S$ a $T$ seleccionando los arcos disyuntivos $O_{13} \rightarrow O_{11}, O_{22} \rightarrow O_{22}$ y $O_{31} \rightarrow O_{32}$ . . . . .	32
3.11. Mínima ruta más larga . . . . .	33
3.12. Diagrama de Gantt . . . . .	33
3.13. Grafo Disyuntivo . . . . .	34
3.14. Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 1	37
3.15. Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 2	38
3.16. Selección de arcos correspondientes a las operaciones en la máquina 3 y 4 . . . . .	38
3.17. Ruta más larga del nodo $S$ al nodo $T$ . . . . .	39
3.18. Inicio: Grafo con los arcos conjuntivos . . . . .	42
3.19. Iteración 1: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 1 . . . . .	44
3.20. Iteración 2: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 2 . . . . .	46
3.21. Iteración 3: Fijación de arcos disyuntivos correspondientes a la máquina 3 y 4 . . . . .	47

---

4.1. Logotipo de la empresa Diseños . . . . .	48
4.2. Bolsas de papel . . . . .	49
4.3. Clientes . . . . .	49
4.4. Corte del cordón . . . . .	51
4.5. Manufactura del asa . . . . .	51
4.6. Impresión del logotipo y secado . . . . .	52
4.7. Primera marca simple . . . . .	52
4.8. Primer marca doble . . . . .	53
4.9. Segunda marca doble . . . . .	53
4.10. Elaboración de la ceja . . . . .	54
4.11. Cierre del pliego . . . . .	54
4.12. Pegado . . . . .	55
4.13. Fuelle . . . . .	55
4.14. Doblez en la parte superior . . . . .	56
4.15. El asa en la bolsa . . . . .	56
4.16. Perforación en la bolsa . . . . .	57
4.17. Base de la bolsa . . . . .	57
4.18. Pegado de la base . . . . .	58
4.19. Pegado del cordón . . . . .	58
4.20. Pegado del cordón . . . . .	59

4.21. Grafo disyuntivo correspondiente al caso de estudio . . . . .	67
4.22. Grafo reducido . . . . .	72
4.23. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	73
4.24. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	74
4.25. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	75
4.26. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	76
4.27. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	77
4.28. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	78
4.29. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	79
4.30. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	80

4.31. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	81
4.32. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	82
4.33. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	83
4.34. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	84
4.35. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	85
4.36. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	86
4.37. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	87
4.38. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	88

4.39. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,1} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	89
4.40. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	90
4.41. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	91
4.42. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	92
4.43. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	93
4.44. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	94
4.45. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	95
4.46. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	96

4.47. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	97
4.48. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	98
4.49. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	99
4.50. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	100
4.51. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,2} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{14,1} \rightarrow O_{14,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	101
4.52. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	102
4.53. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	103
4.54. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,2}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	104



4.55. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	105
4.56. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,1} \rightarrow O_{15,3}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,2} \rightarrow O_{15,3}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	106
4.57. Selección de arcos disyuntivos $O_{14,2} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,1}$ , $O_{14,3} \rightarrow O_{14,2}$ , $O_{15,2} \rightarrow O_{15,1}$ , $O_{15,3} \rightarrow O_{15,1}$ y $O_{15,3} \rightarrow O_{15,2}$ y su respectiva ruta más larga . . . . .	107
4.58. Diagrama de Gantt . . . . .	108

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Instancia para ejemplo de máquina única . . . . .	13
2.2. Regla FIFO . . . . .	13
2.3. Regla LIFO . . . . .	14
2.4. Regla WSPT . . . . .	14
2.5. Regla EDD . . . . .	15
2.6. Regla RC . . . . .	15
2.7. Tiempos de proceso ( $p_i$ ) de los trabajos . . . . .	17
2.8. Matriz de tiempos de setup ( $s_{ij}$ ) . . . . .	17
2.9. Orden de los trabajos de acuerdo a la regla $LPT$ . . . . .	18
3.1. Secuencia en la máquina y tiempo de proceso . . . . .	23
3.2. Secuencia en la máquina y tiempo de proceso . . . . .	34
3.3. Secuencia en la máquina y tiempo de proceso . . . . .	42
3.4. Datos correspondientes a la máquina 1 . . . . .	43
3.5. Datos correspondientes a la máquina 2 . . . . .	43
3.6. Datos correspondientes a la máquina 3 . . . . .	44

---

3.7. Datos correspondientes a la máquina 4 . . . . .	44
3.8. Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 2 . . . . .	45
3.9. Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 3 . . . . .	45
3.10. Iteración 2: Datos correspondientes a la máquina 4 . . . . .	45
3.11. Iteración 3: Datos correspondientes a la máquina 3 . . . . .	47
3.12. Iteración 3: Datos correspondientes a la máquina 4 . . . . .	47
4.1. Datos correspondientes a los tamaños de las bolsas . . . . .	60
4.2. Máquinas con sus operaciones . . . . .	61
4.3. Procesos en los tamaños de las bolsas . . . . .	62
4.4. Tiempos individuales correspondientes al pedido 1 . . . . .	64
4.5. Tiempos individuales correspondientes al pedido 2 . . . . .	64
4.6. Tiempos individuales correspondientes al pedido 3 . . . . .	65
4.7. Secuencia en la máquina y Tiempo de proceso . . . . .	66

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ABDUL-RAZAQ, T. y C. POTTS, «Dynamic programming state-space relaxation for single-machine scheduling», *Journal of the Operational Research Society*, **39**(2), págs. 141–152, 1988.
- [2] ADAMS, J., E. BALAS y D. ZAWACK, «The shifting bottleneck procedure for job shop scheduling», *Management science*, **34**(3), págs. 391–401, 1988.
- [3] ALLAHVERDI, A., C. NG, T. E. CHENG y M. Y. KOVALYOV, «A survey of scheduling problems with setup times or costs», *European Journal of Operational Research*, **187**(3), págs. 985–1032, 2008.
- [4] ANG, L., K. Y. WONG y W. P. WONG, «Simulation of sequencing rules using witness in a milling job shop», *Communications of the IBIMA*, 2011.
- [5] ÁVILA THIEME, C. F. *et al.*, *Aplicación de heurísticas Grasp al problema de máquinas paralelas no relacionadas con tiempos de septup dependientes de la secuencia*, Tesis Doctoral, Universidad de Concepción. Facultad de Ingeniería. Departamento de Ingeniería Industrial, 2014.
- [6] BAKER, K. R., *Introduction to sequencing and scheduling*, John Wiley & Sons, 1974.
- [7] BALAS, E., «Disjunctive programming», *Annals of Discrete Mathematics*, **5**, págs. 3–51, 1979.

- 
- [8] BEN-DAYA, M. y M. AL-FAWZAN, «A tabu search approach for the flow shop scheduling problem», *European journal of operational research*, **109**(1), págs. 88–95, 1998.
- [9] BISKUP, D., «Single-machine scheduling with learning considerations», *European Journal of Operational Research*, **115**(1), págs. 173–178, 1999.
- [10] BOWMAN, E. H., «The schedule-sequencing problem», *Operations Research*, **7**(5), págs. 621–624, 1959.
- [11] CHENG, T. y C. SIN, «A state-of-the-art review of parallel-machine scheduling research», *European Journal of Operational Research*, **47**(3), págs. 271–292, 1990.
- [12] CHENG, T. E. y G. WANG, «Single machine scheduling with learning effect considerations», *Annals of Operations Research*, **98**(1-4), págs. 273–290, 2000.
- [13] COFFMAN, E. G. y J. L. BRUNO, *Computer and job-shop scheduling theory*, John Wiley & Sons, 1976.
- [14] CORREA, J. H. R., M. E. B. LOAIZA y G. C. SARMIENTO, «Aplicación de la heurística de CDS en la secuenciación de tareas en máquinas: un caso de estudio», *Scientia et technica*, **2**(52), págs. 183–188, 2012.
- [15] ESPINAL, A. A. C., E. R. VELÁSQUEZ y M. I. L. RESTREPO, «Secuenciación de operaciones para configuraciones de planta tipo flexible Job Shop: Estado del arte», *Avances en sistemas e informática*, **5**(3), págs. 151–162, 2008.
- [16] ESPINOZA, P. B. C., *Análisis de heurísticas para el problema de máquinas paralelas idénticas, con setup y minimización del makespan*, Tesis Doctoral, Universidad de Concepción, 2009.
- [17] ESTRADA, J., *Ergonomía*, Universidad de Antioquia, 2001.

- [18] FRAMINAN, J. M., J. N. GUPTA y R. LEISTEN, «A review and classification of heuristics for permutation flow-shop scheduling with makespan objective», *Journal of the Operational Research Society*, **55**(12), págs. 1243–1255, 2004.
- [19] FRENCH, S., *Sequencing and scheduling: an introduction to the mathematics of the job-shop*, Ellis Horwood Ltd, Publisher, 1982.
- [20] GAREY, M. R. y D. S. JOHNSON, *Computers and intractability*, tomo 29, wh freeman New York, 2002.
- [21] GAREY, M. R., D. S. JOHNSON y R. SETHI, «The complexity of flowshop and jobshop scheduling», *Mathematics of operations research*, **1**(2), págs. 117–129, 1976.
- [22] GIRALDO, J. A., C. A. TORO y F. A. JARAMILLO, «Aprendiendo sobre la Secuenciación de Trabajos en un Job Shop mediante el Uso de Simulación», *Formación universitaria*, **6**(4), págs. 27–38, 2013.
- [23] HAMIDI, M., «Two New Sequencing Rules for the Non-Preemptive Single Machine Scheduling Problem», *JOURNAL OF BUSINESS INQUIRY*, **15**(2), págs. 116–127, 2016.
- [24] JAIN, A. S. y S. MEERAN, «A state-of-the-art review of job-shop scheduling techniques», *Informe técnico*, Technical report, Department of Applied Physics, Electronic and Mechanical Engineering, University of Dundee, Dundee, Scotland, 1998.
- [25] KAN, A. R., *Machine scheduling problems: classification, complexity and computations*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] LAWLER, E. L., J. K. LENSTRA, A. H. R. KAN y D. B. SHMOYS, «Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity», *Handbooks in operations research and management science*, **4**, págs. 445–522, 1993.
- [27] LAWRENCE, C., «Visualising the ‘Shifting Bottleneck’ Scheduling Algorithm»,  
.

- 
- [28] LENSTRA, J. K., A. R. KAN y P. BRUCKER, «Complexity of machine scheduling problems», *Annals of discrete mathematics*, **1**, págs. 343–362, 1977.
- [29] LIAW, C.-F., «A branch-and-bound algorithm for the single machine earliness and tardiness scheduling problem», *Computers & Operations Research*, **26**(7), págs. 679–693, 1999.
- [30] MANNE, A. S., «On the job-shop scheduling problem», *Operations Research*, **8**(2), págs. 219–223, 1960.
- [31] MARQUEZ DELGADO, J. E., *Optimización de la programación (scheduling) en Talleres de Mecanizado*, Tesis Doctoral, Agronomos, 2012.
- [32] MARTÍN, P. S. y S. L. DE HARO, «Programación de tareas, un reto diario en la empresa», en *Anales de mecánica y electricidad*, tomo 82, Asociacion de Ingenieros del ICAI, págs. 24–30, 2005.
- [33] MARTÍNEZ-RANGEL, M., «Una revisión del problema de calendarizar las tareas en un taller de trabajo (Job Shop Scheduling Problem) mediante el Modelo de grafos disyuntivo y el modelo de programación entera mixta», , 2009.
- [34] MÖNCH, L., R. SCHABACKER, D. PABST y J. W. FOWLER, «Genetic algorithm-based subproblem solution procedures for a modified shifting bottleneck heuristic for complex job shops», *European Journal of Operational Research*, **177**(3), págs. 2100–2118, 2007.
- [35] MONTAZERI, M. y L. VAN WASSENHOVE, «Analysis of scheduling rules for an FMS», *The International Journal of Production Research*, **28**(4), págs. 785–802, 1990.
- [36] OLAGUÍBEL, R. A.-V. y Y. J. M. T. GOERLICH, «Algoritmos heurísticos deterministas y aleatorios en secuenciación de proyectos con recursos limitados», *Qüestió*, **13**(1, 2, 3), págs. 173–191, 1989.

- 
- [37] PENA, V. y L. ZUMELZU, «Estado del Arte del Job Shop Scheduling Problem», *Departamento de Informática, Universidad Técnica Federico Santa María Valparaíso, Chile*, 2006.
- [38] PINEDO, M., *Planning and scheduling in manufacturing and services*, tomo 24, Springer, 2005.
- [39] PINEDO, M. y M. SINGER, «A shifting bottleneck heuristic for minimizing the total weighted tardiness in a job shop», *Naval Research Logistics*, **46**(1), págs. 1–17, 1999.
- [40] POTTS, C. N. y L. VAN WASSENHOVE, «A decomposition algorithm for the single machine total tardiness problem», *Operations Research Letters*, **1**(5), págs. 177–181, 1982.
- [41] RAMAN, R. y I. E. GROSSMANN, «Modelling and computational techniques for logic based integer programming», *Computers & Chemical Engineering*, **18**(7), págs. 563–578, 1994.
- [42] SALAZAR-HORNIG, E. y S. MEDINA, «Minimización del makespan en máquinas paralelas idénticas con tiempos de preparación dependientes de la secuencia utilizando un algoritmo genético», *Ingeniería, investigación y tecnología*, **14**(1), págs. 43–51, 2013.
- [43] SILVA, P. P. B., D. P. B. RIVEROS y M. E. B. LOAIZA, «Programación disyuntiva para n tareas en m máquinas en producción por pedidos.», *Scientia Et Technica*, **1**(30), págs. 273–278, 2006.
- [44] VALENCIA, L. F. L., E. E. OTALORA y N. J. TOVAR, «Programación logística de la producción para talleres textiles tipo Job-shop a partir de la heurística SBH (Shifting Bottleneck Heuristic)», *Revista Vía Innova*, **1**(1), págs. 16–19, 2014.
- [45] WANG, J.-B., «Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration», *Omega*, **35**(4), págs. 397–402, 2007.



- 
- [46] WANG, S. y M. LIU, «A branch and bound algorithm for single-machine production scheduling integrated with preventive maintenance planning», *International Journal of Production Research*, **51**(3), págs. 847–868, 2013.
- [47] WILSON, J. M., «Gantt charts: A centenary appreciation», *European Journal of Operational Research*, **149**(2), págs. 430–437, 2003.

# RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

---

José Guadalupe Torres Chavarría

Candidato para obtener el grado de  
Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA EMPRESA QUE FABRICA  
PRODUCTOS DE PAPEL

Nací el día 15 de abril de 1991 a las 11:45 horas en la ciudad de Monterrey, Nuevo León. Soy hijo único del Sr. José Guadalupe Torres Zamarripa y de la Sra. Maricela Chavarría Chapa. Inicie mis estudios en la Escuela Primaria Julian Garza Tijerina, después en la Escuela Secundaria Técnica #33 Profesor Oziel Hinojosa García. En el año 2006 ingresé a la Preparatoria #7 Unidad Oriente. En el año 2013 me gradué de la Facultad Ciencias Físico Matemáticas obteniendo el título de Licenciado en Matemáticas. En el año 2014 trabaje en la Universidad José Vasconcelos Calderón como catedrático a nivel superior y medio superior. En el año 2013 inicié mis estudios de maestría en el Posgrado de Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León gracias al apoyo de CONACYT.